

Appunti sulla Teoria della Relatività Ristretta

Stefano Ranfone *

Abstract

Keywords: Fisica, Relatività, Einstein.

In questi “Appunti” vogliamo fornire una breve e concisa introduzione alla Teoria della Relatività Ristretta, con l’auspicio che possa essere utile, per esempio, agli studenti di un Quinto Anno di Liceo Scientifico, che potrebbero incontrare argomenti di Relatività nei “problemi” o nei “quesiti”, proposti nella Seconda Prova Scritta (di Fisica-Matematica) dell’Esame di Stato. In tale ottica abbiamo infatti incluso nell’ultima parte un certo numero di Problemi ed Esercizi risolti. Naturalmente, il materiale qui proposto potrebbe anche essere utilizzato da studenti universitari di un Corso introduttivo di Relatività, come complemento ai propri libri di testo.

[In these “Notes” we want to give a brief introduction to the “Special Theory of Relativity”, with the hope that it may be useful, for example, to the High School students in their last year, for preparing their final exam. Also for this reason, we have included in the last sections a certain number of solved problems. Of course, this material might also be used by University students of an Introductory Course of Relativity, as a complement to their textbooks.]

1 Introduzione

Affinché una certa relazione che lega tra loro diverse grandezze fisiche possa essere definita una vera e propria *Legge Fisica*, occorre che questa abbia validità per tutti gli *Osservatori* in moto traslatorio uniforme tra loro; detto più specificatamente, occorre che tale *legge* sia verificata (o verificabile) in tutti i Sistemi di Riferimento *Inerziali*, distinguibili cioè per un diverso moto traslatorio uniforme l’uno rispetto all’altro. Già Galileo aveva elevato tale richiesta a *Principio* fondamentale, il cosiddetto “Principio di Relatività”: \ll *Tutti i Sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti tra loro, e ogni Legge Fisica (per Galileo, solo “Meccanica”) deve mantenere la stessa forma in tutti questi sistemi di riferimento, deve cioè essere “covariante”* \gg . Le *trasformazioni* che nel contesto della *Fisica Classica* permettono di esprimere le coordinate spaziali osservate in un certo sistema di riferimento in termini di quelle osservate in un altro sistema in moto traslatorio uniforme rispetto al precedente, sono dette *Trasformazioni di Galileo*. Vediamo più in dettaglio la forma di queste trasformazioni.

Supponiamo che $\Omega(O; x, y, z)$ sia un Sistema di riferimento (*S.R.*) di origine O e assi (spaziali) x, y, z , che senza perdita di generalità possiamo considerare *in quiete*. Si consideri quindi un altro *S.R.*, $\Omega'(O'; x', y', z')$, in moto traslatorio uniforme con velocità v diretta nel verso positivo delle x , e avente gli assi paralleli a quelli di Ω ; inoltre si assuma che all’istante $t = 0$ le *origini* O e O' dei due *S.R.* coincidano. Ad un generico istante successivo $t > 0$ la situazione sarà allora quella rappresentata in *Fig. 1*, da cui è facile dedurre le formule che permettono di esprimere rispetto al *S.R.* Ω' le coordinate di un generico punto $P(x, y, z)$ (in Ω):

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

$$\begin{cases} x \rightarrow x' = x - vt, \\ y \rightarrow y' = y, \\ z \rightarrow z' = z. \end{cases} \quad (1)$$

Caratteristica fondamentale della Fisica Newtoniana è l'assunzione di un "Tempo Universale", ovvero un tempo che scorre ovunque nello stesso modo, indipendentemente dal S.R. adottato. Questo significa ovviamente che la *coordinata temporale* è la stessa nei due S.R.:

$$t \rightarrow t' = t, \quad (2)$$

un fatto di cui sicuramente né Galileo, né Newton, hanno mai dubitato. Come ora vedremo, invece, è proprio questa l'idea che risulta incompatibile con la "*Relatività Einsteiniana*", portando a conseguenze fondamentali, come per esempio il carattere *relativo* del concetto di "simultaneità" di due eventi.

Vediamo quindi come è nata l'esigenza di modificare le semplici leggi di trasformazione galileiane date dalle eq.(1) e (2). In effetti, ci siamo resi conto all'inizio del XX secolo che queste non erano corrette, quando si è provato ad estendere il "Principio di Relatività" (galileiano) a *tutte* le leggi della Fisica, e non solo a quelle della Meccanica. Nella seconda metà del XIX secolo si era arrivati ad una meravigliosa ed elegante descrizione delle leggi dell'elettromagnetismo (*e.m.*), sintetizzate dalle quattro equazioni di Maxwell¹:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{cases} \quad (3)$$

Il problema di fondo è che queste equazioni non sono *invarianti* rispetto alle trasformazioni di Galileo (1) e (2), poiché in esse è (*sorprendentemente*) presente una costante che ha le dimensioni di una velocità:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (4)$$

Questa risulta essere proprio la velocità con cui si propagano (nel vuoto) le onde elettromagnetiche, come si deduce dal fatto che dalle eq.(3), in assenza di materia ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$), si arriva all'equazione delle onde di d'Alembert sia per il campo elettrico \mathbf{E} che per quello magnetico \mathbf{B} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

È un fatto ormai acquisito anche sperimentalmente ciò che costituisce il cosiddetto "*Postulato di Einstein*", ovvero l'assunzione che la velocità della luce sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dalla loro velocità relativa. Le trasformazioni di Galileo (1) e (2) sono chiaramente incompatibili con tale *Principio*, come si può facilmente verificare col seguente esempio.

L'osservatore in Ω emetta un raggio di luce verso $+x$; la cui *legge oraria* sarà quindi $x = ct$. D'altra parte, la *legge oraria* dell'osservatore "in moto", solidale col sistema Ω' , è $x = vt$ (ovvero, $x' = x - vt = 0$). Utilizzando le formule inverse delle (1) e (2):

$$\begin{cases} x = x' + vt', \\ t = t', \end{cases} \quad (6)$$

¹Per una più ampia discussione si vedano, per esempio, i nostri "*Complementi di fisica*" [1].

nella legge oraria del raggio di luce ($x = ct$) si ottiene quindi:

$$x' + vt' = ct',$$

ovvero:

$$x' = (c - v)t'.$$

Niente di sorprendente, questa formula mostra semplicemente che, secondo la fisica newtoniana, l'osservatore solidale col sistema Ω' vede il raggio di luce propagarsi verso la direzione $+x$ con una velocità ridotta, data dalla differenza $c - v$. Naturalmente, se si fosse mosso nel verso opposto (*i.e.*, $-x$), avrebbe visto il raggio di luce propagarsi con una velocità pari alla somma $c + v$. Come si è detto, però, ciò è incompatibile con la presenza nelle equazioni di Maxwell della (*velocità*) costante “ c ”. Per poter mantenere una stessa velocità della luce in tutti i $S.R.$ è necessario modificare le leggi di trasformazione da un $S.R.$ all'altro. In particolare è necessario abbandonare l'idea di un tempo *assoluto* e *universale*, che scorre nello stesso modo in tutti i $S.R.$

2 Grafici spazio-tempo e Relatività

Per poter ottenere le trasformazioni corrette è necessario dapprima discutere cosa significa dire che due eventi sono “*simultanei*”.

Supponiamo che ad un certo istante t_A un osservatore A emetta un raggio di luce da un punto x_A (dell'asse delle x in Ω) e che un altro osservatore B , all'istante t_B , ne emetta un altro da un punto diverso x_B (sempre sullo stesso asse delle x in Ω). Diremo che (in Ω) i due “*eventi*” (cioè le emissioni dei due raggi) sono *simultanei*, e quindi $t_A = t_B$, se e solo se i suddetti raggi di luce raggiungono un terzo osservatore C in quiete nel punto medio $x_C = (x_A + x_B)/2$ nello stesso istante. È evidente il carattere *relativo* della simultaneità. Infatti, se l'osservatore C , posto in tale punto medio all'istante $t_A = t_B$ (in Ω) di emissione dei due raggi, si muovesse (con Ω') con velocità v verso $+x$ (cioè verso l'osservatore B , in quell'istante iniziale posto in x_B), vedrebbe arrivare il raggio emesso da quest'ultimo prima di quello emesso dall'altro osservatore A , posto alla sua sinistra, dal quale si sta allontanando.

Chiarito quindi così il carattere “relativo” del concetto di *simultaneità*, consideriamo la seguente situazione, allo scopo di derivare le corrette leggi di trasformazione delle coordinate *spaziali* e *temporali* (o meglio, “*spazio-temporali*”) da un $S.R.$ Ω ad un altro, Ω' (entrambi inerziali), in moto rispetto al precedente di moto rettilineo uniforme nella direzione $+x$ con velocità v .

L'osservatore A sia in quiete nell'origine O del sistema *fisso* $\Omega(O; t, x, y, z)$; ci siano poi altri tre osservatori B, C, D solidali col sistema *in moto* $\Omega'(O'; t', x', y', z')$, B nell'origine O' di tale sistema ($x'_B = y'_B = z'_B = 0$), C a distanza L sullo stesso asse x' ($x'_C = L, y'_C = z'_C = 0$), e infine D nel punto $D(x'_D = 2L, y'_D = z'_D = 0)$, cosicché l'osservatore C si trova sempre nel punto medio tra B e D . All'istante $t = 0$ (in Ω), simultaneo all'istante $t' = 0$ (in Ω'), gli assi dei due sistemi coincidano (e quindi $O \equiv O'$), cosicché a tale istante gli osservatori A e B si trovino nello stesso punto dello spazio. Si supponga quindi che in questo stesso istante iniziale B e D emettano un segnale luminoso, che perciò raggiungerà l'osservatore C nel medesimo istante ($t'_* = L/c$, essendo c la velocità della luce, che come si è detto, è la stessa in entrambi i $S.R.$ Ω e Ω'). La Fig. 2 mostra la situazione, descritta nel sistema Ω' (in cui B, C, D sono tutti in quiete), in cui sull'asse delle ordinate abbiamo introdotto la “*coordinata temporale*” $ct' \equiv X^{0'}$, allo scopo di avere grandezze omogenee su entrambi gli assi, e le unità di misura su questi sono scelte, come di consueto, in modo tale che i raggi di luce corrispondano a rette inclinate a 45° . Il *sincronismo* delle emissioni dei due raggi di luce ($t'_B = t'_D = 0$) è mostrato dal fatto che C , posto nel punto medio tra B e D , è raggiunto da questi nello stesso istante $t'_* = L/c$. Ci chiediamo come valuterà tale situazione l'osservatore A in quiete nell'origine O del sistema *fisso* Ω . Poiché B, C, D , si muovono

solidalmente con Ω' verso $+x$ con velocità v , le loro “linee d’universo” saranno rette inclinate di un angolo α , tale che $\tan \alpha = v/c \equiv \beta$ (cosicché $\alpha < 45^\circ$). Poiché la velocità della luce c deve essere la stessa (il “Postulato di Einstein”) anche in Ω , i raggi di luce emessi da B e da D (simultaneamente in Ω' , all’istante $t' = 0$) saranno di nuovo rappresentati da rette inclinate a 45° (come in Fig. 3).

L’osservatore A dirà che i due raggi di luce hanno raggiunto C (nel *punto-evento* Γ) ad un certo istante t , e non avrà dubbi sul fatto che quello emesso dall’osservatore B sia partito all’istante iniziale $t = 0$ (poiché B si trovava in quell’istante nel suo stesso punto $O' \equiv O$), ma non sarà d’accordo sull’istante in cui è stato emesso il raggio luminoso dall’altro osservatore D . Infatti, poiché anche questo raggio di luce deve essere caratterizzato dalla stessa velocità c , e quindi dalla stessa pendenza² (questa volta verso sinistra) a 45° , dalla stessa Fig. 3 si evince che per l’osservatore A (e quindi rispetto a Ω) il raggio deve essere stato emesso da D ad un istante $t_D > 0$ (corrispondente alla coordinata temporale in Ω del *punto-evento* Δ), e perciò non nello stesso istante ($t_B = 0$) nel quale è stato emesso l’altro raggio da B .

In particolare, da quanto detto, possiamo concludere che tutti i punti che stanno sulla retta passante per l’origine $O(\equiv A \equiv B$, all’istante iniziale $t = t' = 0$) ed il punto-evento Δ di emissione del raggio luminoso da parte di D , corrispondono all’istante (iniziale) $t' = 0$ nel sistema *mobile* Ω' . Questo significa che tale retta può essere presa per l’asse x' di tale sistema, esattamente come la retta “linea d’universo” di B (fermo nell’origine O' di Ω') può essere presa come l’asse della sua coordinata temporale $X^{0'} \equiv ct'$. Dimosteremo adesso che i due assi, quello *spaziale* (x') e quello *temporale* (ct'), sono simmetrici rispetto alla bisettrice³, e perciò anche rispetto agli stessi assi, *spaziale* (x) e *temporale* (ct) del sistema *fisso* Ω (solidale con A , in quiete nella sua origine O). Ciò equivale a dire che l’angolo φ in Fig. 3, che esprime l’inclinazione tra gli assi spaziali nei due sistemi, risulta essere uguale all’angolo α tra i rispettivi assi temporali, angolo che esprimendo la pendenza delle linee d’universo solidali col sistema Ω' rispetto al sistema Ω , ha come tangente proprio il rapporto tra la velocità V e quella della luce c , comunemente detto fattore β : $\tan \alpha = V/c \equiv \beta$.

Per dimostrare la congruenza dei due angoli α e φ facciamo riferimento alla Fig. 4. Nello stesso piano (x, ct) (utilizzato anche per la Fig. 3) di Ω si traccino di nuovo le linee d’universo degli osservatori B, C, D , inclinate di un angolo α (tale che $\tan \alpha = \beta = V/c$) rispetto all’asse verticale (quello temporale, ct , di Ω). Si tracci quindi la bisettrice, linea d’universo del raggio emesso da B all’istante iniziale $t = t' = 0$. Questa intersecherà la linea d’universo di C nel punto Γ che caratterizza la sua ricezione di *entrambi* i raggi luminosi, sia quello emesso da B che quello emesso da D . Si tracci quindi la linea d’universo di questo secondo raggio, che deve essere pure inclinato a 45° (essendo caratterizzato dalla medesima velocità della luce c). Questa interseca, come già spiegato, la linea d’universo dell’osservatore D nel punto Δ , in corrispondenza dell’emissione del raggio stesso. Siano quindi P, Q, R i suoi punti d’intersezione con gli assi cartesiani di Ω (x e ct) e con la linea d’universo di B , rispettivamente, come mostrato in Fig. 4. L’asse ct' (di Ω'), come già detto, coincide con la linea d’universo di B , passante per l’origine O ed inclinata dell’angolo α ($\tan \alpha = V/c$) rispetto all’asse ct (di Ω). L’asse spaziale x' è invece la retta passante per O e per il punto Δ . Dobbiamo (*di*)mostrare che tale asse forma con l’asse x lo stesso angolo α che c’è tra i due assi *temporali* ct e ct' , ovvero che $\varphi = \alpha$. Innanzi tutto, dal fatto che le linee d’universo (passanti per $O\Gamma$ e per PQ) dei raggi luminosi sono sempre inclinate di 45° rispetto agli assi di Ω , possiamo concludere che l’angolo \widehat{ORP} , essendo angolo esterno del triangolo OQR , è $\widehat{ORP} = \alpha + 45^\circ$. Inoltre, essendo per ipotesi $\overline{OE} = \overline{E\Delta} (= L)$, e considerando le rette parallele (le linee d’universo in Ω dei tre osservatori B, C, D , solidali col sistema Ω') per $OR, C\Gamma$, e $D\Delta$, dal Teorema di Talete deduciamo che anche $\overline{R\Gamma} = \overline{\Gamma\Delta}$. I due triangoli $OR\Gamma$ e $O\Gamma\Delta$, entrambi rettangoli, avendo i cateti congruenti (uno dei quali, $O\Gamma$, in comune), sono essi stessi congruenti, per cui lo sono anche gli angoli $\widehat{RO\Gamma}$ e $\widehat{\Gamma O\Delta}$. E quindi, in definitiva, anche l’angolo $\varphi \equiv \widehat{\Delta OD}$, essendo il complementare di $\widehat{\Gamma O\Delta}$, è congruente al complementare di $\widehat{RO\Gamma}$, che è appunto l’angolo $\alpha \equiv \widehat{QOR}$, come si voleva dimostrare.

²Cosicché le due rette tratteggiate in rosso e in verde di Fig. 3, rispettivamente passanti per i punti $A\Gamma$ e $\Delta\Gamma$, sono perpendicolari tra loro.

³La bisettrice è chiaramente coincidente con la linea d’universo del raggio luminoso emesso da B all’istante iniziale $t' = t = 0$, quando questo si trovava nella comune origine delle coordinate $O \equiv O'$.

3 Derivazione alternativa delle trasformazioni di Lorentz

Come abbiamo visto nei due precedenti paragrafi, le *Trasformazioni di Galileo* non sono le leggi corrette per esprimere le coordinate spaziali e temporali osservate in un certo sistema di riferimento (inerziale) in termini di quelle osservate in un altro sistema, caratterizzato da un moto rettilineo e uniforme rispetto al precedente. Quelle corrette, sono rappresentate graficamente in *Fig. 4* dal passaggio dagli assi ortogonali ($X^1 \equiv x$, $X^0 \equiv ct$) a quelli inclinati di un angolo α (con $\tan \alpha = \beta = V/c$) rispetto ai precedenti ($X^{1'} \equiv x'$, $X^{0'} \equiv ct'$), e sono dette “Trasformazioni di Lorentz”. Come vedremo meglio nel §5, questa trasformazione geometrica può essere interpretata come una *rotazione* in uno spazio *pseudo-euclideo*, lo “spazio-tempo” di Minkowski. Esistono diversi modi di ricavare queste leggi, ma forse quello ispirato originariamente dallo stesso Einstein risulta per certi aspetti il più interessante. Vediamolo in dettaglio.

Poiché anche nelle trasformazioni *corrette* (quelle di Lorentz, che stiamo cercando) occorre che $x' = 0$ se $x = Vt$ (visto che per ipotesi, il sistema Ω' si sta muovendo con velocità V verso $+x$ rispetto al sistema fisso Ω), si può assumere che queste si possano scrivere introducendo semplicemente un fattore correttivo $f(V^2)$ che dipende solo dal modulo⁴ della velocità V , cosicché possiamo porre⁵:

$$x \rightarrow x' = f(V^2) (x - Vt) = f(V^2) (x - \beta ct), \quad (7)$$

ovvero:

$$X^1 \rightarrow X^{1'} = f(V^2) (X^1 - \beta X^0), \quad (8)$$

(con $X^1 \equiv x$, $X^0 \equiv ct$). Vista quindi la simmetria nella trasformazione geometrica degli assi spaziale e temporale evidenziata nella *Fig. 4*, dovuta al fatto già sottolineato in precedenza che i due assi si *inclinano* dello stesso angolo α rispetto a quelli del sistema fisso Ω , possiamo assumere che anche la trasformazione della coordinata temporale ($X^0 \equiv ct$) abbia la stessa forma:

$$X^0 = ct \rightarrow X^{0'} = ct' = f(V^2) (X^0 - \beta X^1) = f(V^2) \left(ct - \frac{Vx}{c} \right), \quad (9)$$

ovvero:

$$t \rightarrow t' = f(V^2) \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right). \quad (10)$$

Sfruttando l'equivalenza dei due sistemi di riferimento Ω e Ω' , considerando cioè quest'ultimo come sistema *fisso* ed il primo in moto con velocità $-V$ (*i.e.*, verso sinistra, $-x'$), possiamo scrivere direttamente le trasformazioni inverse semplicemente invertendo il segno della velocità V :

$$\begin{cases} X^{1'} \rightarrow X^1 = f(V^2) (X^{1'} + \beta X^{0'}), \\ X^{0'} \rightarrow X^0 = f(V^2) (X^{0'} + \beta X^{1'}). \end{cases} \quad (11)$$

Sostituendo quindi queste formule nell'eq.(8) si ottiene:

⁴Poiché non può neppure dipendere dal suo segno, ovvero dal fatto che Ω' si muova rispetto a Ω verso destra ($+x$) o verso sinistra ($-x$).

⁵Naturalmente, in quanto segue possiamo sempre ignorare le coordinate *trasversali* alla direzione del moto relativo tra i due sistemi di riferimento, che chiaramente restano sempre invariate: $y \equiv X^2 = y' \equiv X^{2'}$ come pure $z \equiv X^3 = z' \equiv X^{3'}$.

$$\begin{aligned}
X^{1'} &= f(V^2) (X^1 - \beta X^0) = f(V^2) \left\{ f(V^2) (X^{1'} + \beta X^{0'}) - \beta f(V^2) (X^{0'} + \beta X^{1'}) \right\} = \\
&= [f(V^2)]^2 (1 - \beta^2) X^{1'},
\end{aligned} \tag{12}$$

da cui si deduce la forma del *fattore correttivo* $f(V^2) \equiv \gamma$, detto “fattore di Lorentz”:

$$f(V^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma. \tag{13}$$

Concludendo, possiamo quindi scrivere in definitiva le *Trasformazioni di Lorentz* cercate nella seguente forma:

$$\begin{cases} X^1 \rightarrow X^{1'} = \gamma (X^1 - \beta X^0), \\ X^0 \rightarrow X^{0'} = \gamma (X^0 - \beta X^1), \end{cases} \tag{14}$$

ovvero:

$$\begin{cases} x \rightarrow x' = \gamma (x - V t), \\ t \rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{V x}{c^2} \right). \end{cases} \tag{15}$$

4 Principali conseguenze delle Trasformazioni di Lorentz

4.1 Composizione relativistica delle velocità

Nel contesto della *Fisica Classica newtoniana*, una delle conseguenze più immediate delle “Trasformazioni di Galileo” (1) e (2) è la familiare (ed intuitiva) regola della “*Somma delle Velocità*”, che qui ricordiamo. Sia $\Omega(O; x, y, z)$ un sistema di riferimento inerziale che possiamo considerare *in quiete* ed “assoluto”, e siano quindi dette *assolute* le velocità osservate in tale sistema. Si consideri adesso un mobile A in moto rispetto ad O con un certo vettore velocità \mathbf{V}_A , e sia $\Omega'(O'; x', y', z')$ il sistema di riferimento, detto “relativo”, ad esso solidale. Un altro mobile B sia infine caratterizzato da una certa altra velocità \mathbf{V}_B' , detta *velocità relativa*, rispetto ad A , e quindi rispetto al sistema (*relativo*) Ω' . La velocità \mathbf{V}_A è spesso detta anche *velocità di trascinamento*. Come il senso comune suggerisce, e come è anche facile derivare dalle trasformazioni di Galileo (1) e (2), la velocità \mathbf{V}_B di B rispetto al sistema (*assoluto*) Ω è semplicemente data dalla somma (vettoriale) della velocità *relativa* \mathbf{V}_B' e di quella *di trascinamento* \mathbf{V}_A :

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B'. \tag{16}$$

Nel semplice caso che qui considereremo, in cui tutte le velocità sono dirette nella direzione x , questo risultato si riduce alla semplice formula:

$$V_B = V_A + V_B', \tag{17}$$

in termini delle rispettive velocità *scalari* (prese col proprio segno).

La difficoltà di questo risultato della Fisica Classica consiste nella possibilità di superare la velocità della luce, contrariamente a quanto stabilito dal Principio di Relatività di Einstein. Per esempio, se entrambe V_A e V_B'

fossero pari ai $2/3$ della velocità della luce c , si otterrebbe $v_B = \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c = \frac{4}{3}c > c$!!! In altre parole, sembrerebbe che il mobile B possa muoversi con una velocità maggiore di quella della luce rispetto al sistema *assoluto* Ω , che come si è detto, sappiamo essere impossibile. Naturalmente questo significa che le semplici leggi date dalle eq.(16) e (17) sono sbagliate, e che vanno modificate. Questo non dovrebbe sorprenderci, visto che sono state ottenute utilizzando le Trasformazioni di Galileo e non quelle *relativisticamente* corrette di Lorentz. Partiremo quindi da queste, date dalle eq.(14), per ottenere la formula corretta della “somma relativistica delle velocità”, limitandoci di nuovo, per semplicità, al solo caso in cui tutte le velocità sono parallele tra loro, e dirette nella stessa direzione x (ovvero x').

Siano (x, t) , (x', t') , (x'', t'') , le coordinate spazio-temporali nei tre sistemi Ω (*fisso, assoluto*), Ω' (*solidale con A*, in moto con velocità V_A diretta lungo x , rispetto a Ω), e Ω'' (*solidale con B*, in moto con velocità V_B' rispetto a Ω' e ad A , pure diretta lungo x), rispettivamente. Dalle trasformazioni di Lorentz date nelle eq.(14) possiamo allora scrivere che⁶:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - V_A t}{\sqrt{1 - V_A^2}}, & t' = \frac{t - V_A x}{\sqrt{1 - V_A^2}}, \\ x'' = \frac{x' - V_B' t'}{\sqrt{1 - V_B'^2}}, & t'' = \frac{t' - V_B' x'}{\sqrt{1 - V_B'^2}}. \end{cases} \quad (18)$$

Il nostro obiettivo è quello di esprimere x'' e t'' in termini di x e t . Sostituendo così le prime due di queste equazioni nella terza si ottiene:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\frac{x - V_A t}{\sqrt{1 - V_A^2}} - V_B' \frac{t - V_A x}{\sqrt{1 - V_A^2}}}{\sqrt{1 - V_B'^2}} = \frac{(x - V_A t) - V_B' (t - V_A x)}{\sqrt{1 - V_A^2} \sqrt{1 - V_B'^2}} = \\ &= \frac{(1 + V_A V_B') x - (V_A + V_B') t}{\sqrt{(1 - V_A^2)(1 - V_B'^2)}} = \frac{x - \frac{V_A + V_B'}{1 + V_A V_B'} t}{\sqrt{\frac{(1 - V_A^2)(1 - V_B'^2)}{(1 + V_A V_B')^2}}}, \end{aligned} \quad (19)$$

che in effetti si può esprimere come una *singola* trasformazione di Lorentz (*boost*):

$$x'' = \frac{x - V_B t}{\sqrt{1 - V_B^2}}, \quad (20)$$

corrispondente ad una velocità V_B , che è quindi proprio la velocità di B osservata nel sistema *assoluto* Ω , data dalla formula:

$$V_B = \frac{V_A + V_B'}{1 + V_A V_B'}; \quad (21)$$

si può infatti provare che il radicando nel denominatore dell'eq.(20) coincide con quello presente nell'ultima delle eq.(19):

⁶Per semplicità, utilizzeremo qui, come pure in alcune delle sezioni che seguiranno, le cosiddette “unità *naturali*”, in cui $c = 1$.

$$\begin{aligned}
1 - V_B^2 &= 1 - \left(\frac{V_A + V_B'}{1 + V_A V_B'} \right)^2 = \frac{1 + V_A^2 V_B'^2 + 2 V_A V_B' - V_A^2 - V_B'^2 - 2 V_A V_B'}{(1 + V_A V_B')^2} = \\
&= \frac{(1 - V_A^2)(1 - V_B'^2)}{(1 + V_A V_B')^2}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Ripristinando le usuali unità di misura, ovvero inserendo di nuovo la velocità della luce c nell'eq.(21), possiamo in definitiva concludere che la corretta formula (*relativistica*) per la somma delle velocità è quindi la seguente:

$$V_B = \frac{V_A + V_B'}{1 + \frac{V_A V_B'}{c^2}}. \tag{23}$$

È facile rendersi conto che in questo modo non sarà mai possibile superare la velocità della luce. Se infatti consideriamo di nuovo l'esempio precedente, in cui sia la velocità *relativa* V_B' che quella *di trascinamento* V_A sono pari a $2/3 c$, la velocità *assoluta* del mobile B nel sistema fisso Ω risulta essere:

$$V_B = \frac{\frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c}{1 + \frac{(\frac{2}{3}c)^2}{c^2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{13} c = \frac{12}{13} c, \tag{24}$$

e quindi ancora minore della velocità della luce c .

4.2 La contrazione delle lunghezze

Qualsiasi lunghezza, fosse di un segmento \overline{AB} , o di un qualsiasi oggetto, se misurata nel “*proprio*” sistema di riferimento, cioè un sistema di riferimento ad esso solidale (rispetto al quale quindi è in quiete), è detta lunghezza *propria*, esattamente come ogni intervallo di tempo è in tale sistema detto tempo *proprio*. Vediamo allora come queste grandezze vengono percepite da un osservatore in quiete nel sistema *fisso* $\Omega(O; x, y, z; t)$ rispetto al quale il segmento \overline{AB} è in moto con una certa velocità V , diretta verso la direzione positiva delle x , come assunto anche in precedenza.

Siano x_A' e x_B' le coordinate (lungo x) degli estremi del segmento \overline{AB} , misurate nel sistema di riferimento ad esso solidale, d'ora in poi semplicemente detto “*proprio*”, e siano x_A e x_B i corrispondenti valori *misurati* dall'osservatore solidale col sistema *fisso* Ω nel medesimo istante $t_A = t_B = 0$. Dalle trasformazioni di Lorentz (15) si può quindi scrivere:

$$\begin{cases} x_A' = \gamma(x_A - \beta c t_A) = \gamma x_A, \\ x_B' = \gamma(x_B - \beta c t_B) = \gamma x_B, \end{cases} \tag{25}$$

da cui si ottiene che la lunghezza $L_{AB} \equiv \overline{AB} = x_B - x_A$ del segmento AB , “*vista*” in Ω è:

$$L_{AB} = x_B - x_A = \frac{1}{\gamma}(x_B' - x_A') = \frac{1}{\gamma} L'_{AB} = \sqrt{1 - \beta^2} L'_{AB}, \tag{26}$$

ovvero sia, risulta essere “*contratta*” di un fattore $1/\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$, rispetto a quella *propria*. Questo fatto costituisce la ben nota “*contrazione di Lorentz delle lunghezze*”.

Supponiamo, per esempio, che un'astronave spaziale di lunghezza propria $L_0 = 10 \text{ m}$ si muova al 95% della velocità della luce (rispetto a Terra), cosicché si abbia $\beta = V/c = 0.95$ ed il suo *fattore di Lorentz* sia quindi $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 3.2$. L'osservatore a Terra, misurandone la lunghezza, troverà invece un valore ridotto, dato da:

$$L = \sqrt{1-\beta^2} L_0 = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{10 \text{ m}}{3.2} \simeq 3.1 \text{ m}. \quad (27)$$

Un altro esempio possiamo darlo nel contesto della Fisica delle Particelle. Supponiamo che un fascio di protoni caratterizzato da un *fattore di Lorentz* $\gamma = 1000$ (con protoni di energia pari a circa 1 TeV) sia costituito da “*bunches*” (grappoli) assimilabili in *Laboratorio* a cilindretti di lunghezza $L_{lab} = 2 \text{ mm}$ e sezione $S_{lab} = 1 \mu\text{m}^2$. Il volume di ciascun *bunch* nel *Laboratorio* è quindi pari a $V_{lab} = L_{lab} S_{lab} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ m}^3$. Nel sistema di riferimento solidale col fascio stesso, tali grandezze (*proprie*) sarebbero invece:

$$\begin{cases} L_0 = \gamma L_{lab} = 1000 \cdot 2 \text{ mm} = 2 \text{ m}, \\ S_0 = S_{lab} = 1 \mu\text{m}^2, \\ V_0 = L_0 S_0 = \gamma V_{lab} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3. \end{cases} \quad (28)$$

4.3 La Dilatazione temporale

Vediamo adesso come un certo intervallo di tempo “*proprio*” $\Delta t' = t_B' - t_A'$ viene percepito da un osservatore in quiete nell'origine O del sistema *fisso* $\Omega(O; x, y, z; t)$, rispetto al quale il sistema *mobile* (in cui l'intervallo di tempo *proprio* è per l'appunto $\Delta t'$) si sta muovendo con velocità V verso $+x$, come già assunto in precedenza. Supponendo che l'*evento* (di durata *propria* $\Delta t'$) avvenga nell'origine O' del sistema $\Omega'(O'; x', y', z'; t')$, si può porre $x_A' = x_B' = 0$ nelle trasformazioni di Lorentz (*inverse* delle (15)):

$$\begin{cases} x_A = \gamma(x_A' + \beta c t_A') = \gamma \beta c t_A', & x_B = \gamma(x_B' + \beta c t_B') = \gamma \beta c t_B', \\ t_A = \gamma(t_A' + \frac{\beta}{c} x_A') = \gamma t_A', & t_B = \gamma(t_B' + \frac{\beta}{c} x_B') = \gamma t_B', \end{cases} \quad (29)$$

ottenendo così per l'intervallo di tempo percepito dall'osservatore *fisso* in O , la seguente espressione:

$$\Delta t = t_B - t_A = \gamma(t_B' - t_A') = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (30)$$

In altre parole, il tempo “*proprio*” $\Delta t'$ viene percepito in Ω come un tempo *maggiore* Δt , “*dilatato*” di un fattore γ .

Classico esempio è quello relativo al decadimento di una particella, come il muone, la cui *vita media* “*propria*”, cioè quella misurata nel sistema in cui esso è in quiete, è $\tau_0 = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. Ciò significa che, se non ci fossero gli effetti relativistici di dilatazione temporale di cui stiamo parlando, pur muovendosi a velocità molto prossime a quella della luce, un muone potrebbe percorrere soltanto uno spazio $s_0 = c \tau_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \simeq 660 \text{ m}$. Ma questo sappiamo essere in contraddizione con l'osservazione nei nostri rivelatori al suolo dei tanti muoni prodotti nell'alta atmosfera dai raggi cosmici, muoni che quindi devono percorrere distanze grandi almeno quanto l'intero spessore dell'atmosfera terrestre, prima di decadere: $\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu$. La corretta interpretazione di questo fatto è che, in effetti, la *vita media* “*osservata*” da Terra di un muone in moto con velocità relativistica ($V \simeq c$) è *dilatato* di un fattore γ . Per esempio, un muone con un'energia pari a 1 GeV è caratterizzato (come si vedrà in seguito) da un *fattore di Lorentz* pari a:

$$\gamma = \frac{E_\mu}{m_\mu c^2} = \frac{1 \text{ GeV}}{106 \text{ MeV}} = 9.4, \quad (31)$$

cosicché la sua vita media misurata da Terra risulta essere:

$$\tau = \gamma \tau_0 = 9.4 \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \simeq 2.1 \cdot 10^{-5} \text{ s}, \quad (32)$$

a cui corrisponde uno spazio percorso prima del decadimento dato da:

$$s = V \tau = \beta c \gamma \tau_0 = \sqrt{\gamma^2 - 1} c \tau_0 = \sqrt{\gamma^2 - 1} s_0 \simeq \sqrt{9.4^2 - 1} \cdot 660 \text{ m} \simeq 6.2 \text{ km}, \quad (33)$$

compatibile quindi con la sua osservazione nei nostri rivelatori.

Si fa notare qui che, nel caso *ultra-relativistico*, $\gamma \gg 1$, lo spazio percorso viene *dilatato* approssimativamente dello stesso fattore di Lorentz γ , poiché $\sqrt{\gamma^2 - 1} \simeq \gamma$.

Altro classico esempio è quello relativo a due *gemelli*, di cui uno, che diremo l'*astronomo*, resta a Terra, mentre il fratello, l'*astronauta*, va in missione (di andata e ritorno) su un pianeta del sistema di α -Centauri (*Proxima*), lontano⁷ $D = 5 \text{ l.y.}$, muovendosi con una velocità pari al 99.9% della velocità della luce. Ci si chiede quanti anni saranno passati al ritorno dalla missione, sulla Terra (e quindi secondo il fratello astronomo), e sull'astronave (e quindi secondo l'orologio dell'astronauta).

Il tempo (*dilatato*) trascorso sulla Terra durante la missione è chiaramente dato da:

$$\Delta t_T = \frac{2D}{V} = \frac{2 \cdot 5 \text{ l.y.}}{0.999 c} = \frac{10 c T_a}{0.999 c} = \frac{10 T_a}{0.999} \simeq 10 T_a \equiv 10 \text{ anni}, \quad (34)$$

mentre quello *vissuto* realmente dall'astronauta (il tempo *proprio*), Δt_{astr} , risulta essere alquanto minore:

$$\Delta t_{astr} = \frac{\Delta t_T}{\gamma} = \Delta t_T \sqrt{1 - \beta^2} = (10 \text{ anni}) \cdot \sqrt{1 - 0.999^2} \simeq 0.45 \text{ anni} \simeq 163 \text{ giorni!} \quad (35)$$

In altre parole, il gemello *astronomo* rimasto a Terra sarà invecchiato di ben 10 anni, mentre per il fratello *astronauta* sono trascorsi solo 5 mesi e 13 giorni, risultando in una differenza di età dal fratello di oltre nove anni e mezzo !

Questo fenomeno, comunemente noto come "*Paradosso dei Gemelli*", è definito tale perché fa sorgere l'obiezione secondo la quale non si capisce perché in realtà uno dei fratelli possa invecchiare più dell'altro, nel senso che si potrebbe pensare che, dal punto di vista dell'astronauta, è il fratello astronomo con tutta la Terra a muoversi in verso *opposto*, e questo potrebbe indurci a ritenere che possa essere l'astronauta ad invecchiare più del fratello astronomo (*viaggiatore, con tutta la Terra*). La soluzione di questo *apparente* paradosso consiste nell'osservare che in realtà non c'è "*simmetria*" tra i due fratelli, poiché solo uno dei due, l'astronauta, è soggetto a notevoli accelerazioni, alla partenza, quando inverte il moto arrivato su α -Centauri, e infine al ritorno a Terra. Pertanto l'effetto è assolutamente reale, e non c'è alcun paradosso !

⁷Ricordiamo che l'*Anno Luce*, la distanza percorsa dalla luce in un anno, è data da: $1 \text{ l.y.} = c T_a = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 365 \text{ days} \cdot 24 \text{ h/day} \cdot 3600 \text{ s/h} \simeq 9500 \text{ Gkm} = 9.5 \cdot 10^{15} \text{ m}$.

5 Trasformazioni di Lorentz e Geometria dello Spazio-Tempo

Come abbiamo visto nel § 2, le corrette trasformazioni delle coordinate spazio-temporali nel passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sono quelle di Lorentz, espresse in termini delle variabili⁸ $X^0 = ct$ e $X^1 = x$ dalle eq.(14), dove, per semplicità di scrittura, abbiamo ignorato le coordinate spaziali ortogonali al moto, $X^2 = y$ e $X^3 = z$, che chiaramente restano le stesse nei due sistemi. È evidente la *simmetria* in queste equazioni tra la variabile spaziale X^1 e quella temporale X^0 , simmetria che può essere resa ancora più esplicita scrivendo le eq.(14) in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} X^{0'} \\ X^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Poiché la velocità della luce deve essere la stessa nei due sistemi di riferimento, occorre verificare che la quantità $S^2 = c^2 t^2 - x^2$ resti invariata, ovvero che sia un “*invariante relativistico*”:

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2, \quad (37)$$

equivalente a dire, in termini delle *componenti* spazio-temporali:

$$S^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 = (X^{0'})^2 - (X^{1'})^2. \quad (38)$$

Ed infatti è facile verificare che le trasformazioni date dalle eq.(14), ovvero le (36), soddisfano tale condizione:

$$\begin{aligned} (X^{0'})^2 - (X^{1'})^2 &= \{\gamma(X^0 - \beta X^1)\}^2 - \{\gamma(X^1 - \beta X^0)\}^2 = \\ &= \gamma^2 \{(X^0)^2 - (X^1)^2\} (1 - \beta^2) = (X^0)^2 - (X^1)^2, \end{aligned} \quad (39)$$

dove si è utilizzata la definizione del fattore di Lorentz data nell’eq.(13).

L’invariante S^2 ha anche un’evidente interpretazione fisico-geometrica. Dati due eventi $A(X_A^0 = ct_A; X_A^1 = x_A, X_A^2 = y_A, X_A^3 = z_A)$ e $B(X_B^0 = ct_B; X_B^1 = x_B, X_B^2 = y_B, X_B^3 = z_B)$, la quantità:

$$(\Delta S_{AB})^2 = (\Delta X^0)^2 - (\Delta X^1)^2 - (\Delta X^2)^2 - (\Delta X^3)^2, \quad (40)$$

può essere considerata come la loro “*distanza*” nello spazio-tempo. Coppie di eventi per i quali $(\Delta S_{AB})^2 > 0$ sono *causalmente connesse*⁹ e lo stesso *intervallo* $(\Delta S)^2$ è detto *di tipo-tempo* (o “time-like”), mentre quelle per cui $(\Delta S_{AB})^2 < 0$, *causalmente non-connesse*, corrispondono a distanze nello spazio-tempo *di tipo-spazio* (o “space-like”).

Sia dalla Fig. 5, che dalle stesse trasformazioni di Lorentz scritte in forma matriciale (36), è abbastanza evidente l’analogia con le usuali *rotazioni spaziali*; così come queste, essendo isometrie, lasciano invariate le *lunghezze* (e quindi le distanze tra punti nello spazio), così le trasformazioni di Lorentz lasciano inalterate le *distanze nello spazio-tempo* definite come in eq.(38), e di conseguenza deve essere nullo il relativo *differenziale*:

$$dS^2 = d(X^0)^2 - d(X^1)^2 - d(X^2)^2 - d(X^3)^2 = 0. \quad (41)$$

⁸Gli indici spazio-temporali 0, 1, 2, 3 vanno distinti da eventuali *esponenti* numerici, dal contesto.

⁹Questo perché uno dei due può influenzare l’altro, per esempio, attraverso un raggio di luce.

In effetti, prendendo come esempio una rotazione nel piano (x, y) di un angolo θ , in cui la trasformazione delle coordinate è data da:

$$\begin{cases} x \rightarrow x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y \rightarrow y' = x \sin \theta + y \cos \theta, \end{cases} \quad (42)$$

che può essere espressa in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (43)$$

è immediato verificare che la distanza dall'origine O del punto P , calcolabile col Teorema di Pitagora, resta invariata:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2. \quad (44)$$

Ed in effetti, anche le trasformazioni di Lorentz possono essere considerate come “rotazioni” nello spazio-tempo, fatto reso ancor più evidente scrivendo l'eq.(36) nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X^{0'} \\ X^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma \\ -\beta \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi \\ -\sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

dove si è posto:

$$\gamma = \cosh \xi, \quad \gamma \beta = \sinh \xi, \quad (46)$$

cosicché:

$$\beta = \frac{V}{c} = \tanh \xi. \quad (47)$$

Confrontando le matrici che descrivono le usuali rotazioni nel piano date nell'eq.(43), con quelle relative alle trasformazioni di Lorentz date nelle eq.(36) e (45), notiamo il diverso segno dell'elemento¹⁰ di matrice “21”. È a causa di questo diverso segno che, mentre le rotazioni spaziali lasciano invariate le somme dei quadrati delle coordinate, come nella (44), le trasformazioni di Lorentz lasciano invariate le loro differenze, come mostrato nella (38). Questo fatto si esprime dicendo che, mentre lo spazio ordinario tridimensionale è “euclideo”, lo spazio-tempo 4-dimensionale è “pseudo-euclideo”, o “minkowskiano”¹¹. Questo è il motivo per cui le trasformazioni di Lorentz possono essere considerate a tutti gli effetti rotazioni nello spazio-tempo. La differenza tra i due spazi è anche evidente dalla rappresentazione grafica delle rispettive rotazioni. Mentre nelle rotazioni dell'ordinario spazio euclideo entrambi gli assi (x, y) ruotano nello stesso verso dell'angolo θ , nelle trasformazioni di Lorentz gli assi temporale $X^0 = ct$ e spaziale $X^1 = x$ ruotano in versi opposti dello stesso angolo α ($= \arctan \beta$, con $\beta = V/c$), come si evince dalla Fig. 5, tendendo a chiudersi verso la bisettrice¹² mano a mano che $\beta \rightarrow 1$ (ovvero $V \rightarrow c$).

¹⁰Cioè, dette R_{ij} , ($i, j = 1, 2$) e $\Lambda^{\mu\nu}$, ($\mu, \nu = 0, 1$), rispettivamente, le matrici corrispondenti alle rotazioni spaziali (nel piano x, y) e alle trasformazioni di Lorentz (boost nella direzione $X^1 \equiv x$), si ha: $R_{21} = -R_{12} (= \sin \theta)$, mentre $\Lambda^2_1 = \Lambda^1_2 (= -\beta \gamma = -\sinh \xi)$.

¹¹Dal fisico Minkowski, che fu il primo ad introdurre il concetto di “spazio-tempo”.

¹²La bisettrice, $X^1 = X^0$, ovvero $x = ct$, corrisponde alla linea d'universo dei raggi di luce, come già detto nel § 2.

A questo punto è facile generalizzare il concetto di *vettore* tridimensionale dello spazio ordinario euclideo, come quello associato ad ogni punto dello spazio: $\mathbf{r}_P \equiv \overline{OP} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \equiv (x, y, z) \equiv x_i (i = 1, 2, 3)$, a quello di *4-vettore* nello spazio-tempo, come quello associato ad ogni punto-evento: $(X^0 = ct, X^1 = x, X^2 = y, X^3 = z) \equiv X^\mu$, ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Detto $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ il generico 4-vettore¹³ (per il quale, quindi, A^0 è detta la sua *componente temporale*, e A^i (con $i = 1, 2, 3$) le sue *componenti spaziali* corrispondenti all'ordinario 3-vettore $\mathbf{A} = \hat{i}A^1 + \hat{j}A^2 + \hat{k}A^3$), la sua trasformazione causata da un qualsiasi *boost* di Lorentz potrà essere espressa dalla seguente equazione:

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \quad (48)$$

dove nell'ultimo *step* si è introdotta la cosiddetta *convenzione di somma* di Einstein sugli indici ripetuti, e dove $\Lambda^\mu{}_\nu$ è la matrice che rappresenta la trasformazione di Lorentz. Nel caso di un semplice *boost* nella direzione $x = X^1$ con velocità $V = \beta c$, questa sarebbe quindi uguale a quella data in eq.(36), completata da $X^2 = y$ e $X^3 = z$:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

A causa della natura *pseudo-euclidea* (minkowskiana) dello spazio-tempo, il “*modulo-quadrato*” del generico 4-vettore A^μ , che è quindi un *invariante relativistico*¹⁴, va scritto utilizzando il teorema di Pitagora *col segno “sbagliato”*:

$$(A)^2 \equiv A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2, \quad (50)$$

dove naturalmente $|\mathbf{A}|^2$ è il modulo-quadro dell'ordinario vettore tridimensionale, e dove si è introdotto il cosiddetto *tensore metrico*¹⁵ $g_{\mu\nu}$, dato dalla matrice¹⁶:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (51)$$

e che serve per *alzare* o *abbassare* gli indici spazio-temporali.

Un esempio importante di 4-vettore è il cosiddetto 4-impulso (o *quadrimpulso*) P^μ , la cui componente temporale è l'energia divisa per la velocità della luce: $P^0 = E/c$, e le sue componenti spaziali costituiscono semplicemente l'ordinario vettore dell'impulso (o *quantità di moto*): P^i , ($i = 1, 2, 3$); detto altrimenti, possiamo scrivere: $P^\mu = (P^0 = E/c; \mathbf{p})$. Nel §6 troveremo le espressioni relativistiche di energia e impulso con le quali potremo verificare che l'*invariante relativistico* associato a questo 4-vettore è: $(P)^2 \equiv P \cdot P = P^\mu P_\mu = (P^0)^2 - (P^1)^2 - (P^2)^2 - (P^3)^2 = (E^2/c^2) - |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2$, dove m è la *massa “a riposo”* della particella.

¹³Come di consueto, indici *latini* $i, j, k \dots (= 1, 2, 3)$ si riferiscono all'ordinario spazio 3-dimensionale euclideo, mentre quelli *greci* $\mu, \nu, \dots (= 0, 1, 2, 3)$ si utilizzano per caratterizzare le componenti nello spazio-tempo 4-dimensionale di Minkowski.

¹⁴Ovvero, resta lo stesso in tutti i sistemi di coordinate legati tra loro attraverso trasformazioni di Lorentz.

¹⁵Che peraltro non è un *vero* tensore !

¹⁶Il tensore metrico può essere utilizzato per *alzare* o *abbassare* gli indici spazio-temporali, creando una distinzione tra vettori *controvarianti*, A^μ , che si trasformano come nella (48), e quelli *covarianti*, A_μ , che si trasformano attraverso l'*inversa* di $\Lambda^\mu{}_\nu$; se $A^\mu(A^0; \mathbf{A})$ è un certo vettore *controvariante*, allora il corrispondente vettore *covariante* ha componenti: $A_\mu = (A^0; -\mathbf{A})$. Per ulteriori dettagli si veda, per esempio, [3].

6 Elementi di Dinamica Relativistica

In questa parte vogliamo dare solo qualche breve cenno di Dinamica Relativistica, partendo dal fatto che la massa *relativistica* di una particella¹⁷ è data da:

$$m = \gamma m_0 , \quad (52)$$

essendo m_0 la massa *propria*, ovvero la massa misurata in un sistema di riferimento solidale con la particella stessa, in cui questa è in quiete. Utilizzando la Legge di Newton della Dinamica (considerando, per semplicità, il caso unidimensionale):

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m V) , \quad (53)$$

possiamo esprimere il lavoro infinitesimo dL compiuto dalla forza risultante F in uno spostamento (infinitesimo) dx come:

$$dE = dL = F dx = \frac{d}{dt}(m V) dx = V d(m V) = V^2 dm + m V dV , \quad (54)$$

(essendo $V = dx/dt$), da cui:

$$m V dV = dE - V^2 dm . \quad (55)$$

D'altra parte, dall'eq.(52), e utilizzando la definizione del fattore di Lorentz γ data nella (13), si trova che:

$$m^2 (c^2 - V^2) = m_0^2 c^2 ; \quad (56)$$

differenziando questa espressione, si giunge quindi a:

$$2 m (c^2 - V^2) dm - 2 m^2 V dV = d(m_0^2 c^2) = 0 , \quad (57)$$

ovvero:

$$(c^2 - V^2) dm = m V dV . \quad (58)$$

Dalle eq.(55) e (58) si evince pertanto che:

$$dE - V^2 dm = (c^2 - V^2) dm , \quad (59)$$

e perciò, in definitiva:

$$dE = c^2 dm , \quad (60)$$

¹⁷Solo in questo § intenderemo per m la massa relativistica, e con m_0 quella "a riposo" di una particella.

o in forma finita:

$$E = m c^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (61)$$

che è la ben nota *Formula di Einstein*, e dove si è definita la “massa relativistica” come:

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (62)$$

Per ottenere l'espressione relativistica dell'impulso, ovvero della quantità di moto, possiamo sfruttare proprio il fatto che il modulo-quadrato di un 4-vettore è per definizione un invariante relativistico, cioè il fatto che questo rimane lo stesso in tutti i sistemi di riferimento (in moto traslatorio uniforme tra loro). Se infatti ci calcoliamo il modulo quadro del 4-impulso di una particella in un sistema ad essa solidale, in cui quindi $P^\mu = (E_0/c; \vec{0})$, e l'energia è: $E_0 = m_0 c^2$, si ottiene:

$$(P)^2 = (P^0)^2 = \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 = m_0^2 c^2. \quad (63)$$

Uguagliando questa quantità a quella calcolata in un qualsiasi altro sistema di riferimento, in cui $P^\mu = (E/c; \mathbf{p})$, con l'energia E data dalla *formula di Einstein* (61), si trova che:

$$(P)^2 = m_0^2 c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\mathbf{p}|^2, \quad (64)$$

da cui si ottiene che l'energia relativistica può essere scritta anche come:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + |\mathbf{p}|^2 c^2}. \quad (65)$$

Per ottenere l'espressione cercata dell'impulso è sufficiente uguagliare quest'ultima equazione con la (61), ed esplicitare il modulo $|\mathbf{p}|$:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + |\mathbf{p}|^2 c^2 = (\gamma m_0 c^2)^2 \Rightarrow |\mathbf{p}|^2 = (\gamma^2 - 1) m_0 c^2 \Rightarrow |\mathbf{p}| = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (66)$$

ovvero, nella definitiva forma vettoriale:

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{V} \equiv \frac{m_0 \mathbf{V}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (67)$$

Vediamo adesso come si può esprimere l'energia cinetica T di una particella. Questa si può definire come la differenza tra l'energia relativistica (61) e quella a riposo E_0 , ottenendo di conseguenza:

$$T = E - E_0 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2. \quad (68)$$

Verifichiamo che, come sarebbe lecito aspettarsi, questa espressione (relativistica) si riduce per basse velocità ($V \ll c$, cioè per $\beta \ll 1$) alla usuale formula della Fisica newtoniana:

$$T = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) m_0 c^2 \simeq \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \dots - 1 \right) m_0 c^2 \simeq \frac{1}{2} m_0 V^2, \quad (69)$$

dove si è utilizzato lo sviluppo in serie: $(1 - \beta^2)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots$

7 Approfondimento: Derivazione alternativa della formula sulla “somma relativistica” delle velocità

In questo breve *approfondimento* vogliamo dimostrare di nuovo la legge relativistica sulla somma delle velocità data in eq.(23), ottenuta nel §4.1 applicando direttamente le trasformazioni di Lorentz. Questa volta però utilizzeremo le proprietà di trasformazione del 4-vettore $P^\mu = (P^0 = E/c; \mathbf{p}(p_x, p_y, p_z))$, dove l'energia E è data da¹⁸: $E = \gamma m c^2$, e la componente i -esima dell'impulso ($i = 1, 2, 3$) è: $p^i = \gamma m V^i$.

Come in precedenza, si supponga che il sistema $\Omega' (O'; X^{0'} = ct', X^{1'} = x', X^{2'} = y', X^{3'} = z')$ si muova con velocità uniforme V nella direzione positiva delle x , rispetto al sistema $\Omega (O; X^0 = ct, X^1 = x, X^2 = y, X^3 = z)$. Detti quindi P^μ e $P^{\mu'}$ i 4-impulsi nei due sistemi di riferimento, diremo che quest'ultimo è il *trasformato di Lorentz* del primo. Pertanto, generalizzando l'eq.(48), avremo che:

$$P^\mu \rightarrow P^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_{\nu'} P^\nu, \quad (70)$$

dove la matrice della trasformazione è data nell'eq.(49). Secondo questa equazione le componenti *spaziali* trasformano allora come segue:

$$p^i \rightarrow p^{i'} = \Lambda^i{}_{\nu'} P^\nu = \Lambda^i{}_0 P^0 + \Lambda^i{}_j p^j. \quad (71)$$

In particolare, per la componente diretta lungo x ($i = 1$; la stessa direzione del *boost* di Lorentz), cioè la direzione verso la quale si muove il sistema Ω' rispetto al sistema Ω , si ha:

$$p^1 \rightarrow p^{1'} = \Lambda^1{}_0 P^0 + \Lambda^1{}_j p^j = \Lambda^1{}_0 P^0 + \Lambda^1{}_1 p^1 = (-\beta\gamma) \frac{E}{c} + \gamma p^1, \quad (72)$$

ovvero:

$$\gamma_1' m V_1' = -\beta\gamma (\gamma_1 m c) + \gamma (\gamma_1 m V_1), \quad (73)$$

e quindi:

$$\gamma_1' V_1' = \gamma \gamma_1 (V_1 - V). \quad (74)$$

Quadrando ed esprimendo i fattori di Lorentz γ in termini dei rispettivi β si trova:

$$\frac{(\beta_1')^2}{1 - (\beta_1')^2} = \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{1}{1 - \beta_1^2} (\beta_1 - \beta)^2; \quad (75)$$

¹⁸D'ora in poi, a meno che venga detto altrimenti, indicheremo sempre con m la massa a riposo della particella.

prendendone il reciproco ed esplicitando rispetto a $\beta_1' = V_1'/c$, otteniano, dopo qualche semplice passaggio algebrico, il seguente risultato:

$$\beta_1' = \frac{\beta_1 - \beta}{1 - \beta_1 \beta}. \quad (76)$$

Infine, invertendo questa formula, arriviamo allo stesso risultato (23) ottenuto nel § 4.1:

$$\beta_1 = \frac{\beta_1' + \beta}{1 + \beta_1' \beta}, \quad (77)$$

ovvero:

$$V_1 = \frac{V_1' + V}{1 + \frac{V_1' V}{c^2}}, \quad (\text{q.e.d.}) \quad (78)$$

8 Cenni di Cinematica Relativistica

In Fisica delle Particelle è spesso conveniente l'utilizzo del cosiddetto *sistema di Unità naturali*¹⁹, in cui $c = 1$. In tale sistema l'energia e l'impulso di una particella assumono le seguenti espressioni (ottenute ponendo $c = 1$ nelle formule del § precedente):

$$P^0 = E = \gamma m = \sqrt{p^2 + m^2}; \quad p^i = \gamma m V^i, \quad p \equiv |\mathbf{p}| = \gamma m V, \quad (79)$$

(dove $V \equiv |\mathbf{V}|$) e quindi:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{E}, \quad (80)$$

o in modulo:

$$V = \frac{p}{E}. \quad (81)$$

Inoltre, l'energia cinetica T si può scrivere:

$$T = E - m = (\gamma - 1) m, \quad (82)$$

dove, naturalmente:

$$\beta = V, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}. \quad (83)$$

¹⁹In questo *sistema* non solo è unitaria la velocità della luce, $c = 1$, ma si pone anche $\hbar = 1$, e $k_B = 1$, essendo $\hbar = h/2\pi$ ($\simeq 1.05 \cdot 10^{-34}$ J s) la costante di Planck *ridotta* e k_B ($\simeq 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K) la costante di Boltzmann.

In Fisica delle Particelle si è soliti esprimere le masse (*a riposo*) delle particelle direttamente in unità energetiche, solitamente in *multipli dell'elettronvolt*; si ricorda che $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Per esempio, poiché la massa dell'elettrone è $m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, scriveremo che:

$$m_e c^2 = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 81 \cdot 10^{-15} \text{ J} = \frac{81 \cdot 10^{-15}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 0.51 \text{ MeV}, \quad (84)$$

(anche se sarebbe più corretto esprimere le masse in MeV/c^2 o GeV/c^2 , noi seguiremo l'usuale prassi di lasciare le masse in unità energetiche, MeV o GeV). Per il protone, analogamente, risulta: $m_p = 938 \text{ MeV}$ (ovvero, approssimativamente uguale a 1 GeV), mentre per un *muone* si ottiene: $m_\mu = 106 \text{ MeV}$.

Diamo un esempio specifico. Si abbia un fascio di elettroni di energia pari a $E_e = 1 \text{ GeV}$. Calcoliamone tutte le caratteristiche: il loro *fattore di Lorentz* (nel *Laboratorio*) è:

$$\gamma = \frac{E_e}{m_e} = \frac{1 \text{ GeV}}{0.51 \text{ MeV}} \simeq 1961,$$

per cui si tratta di elettroni *ultra-relativistici*, ed in effetti $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} \simeq 1$; il loro impulso p è pertanto:

$$p = \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \simeq E_e = 1 \text{ GeV}/c,$$

(avendo ripristinato in questo caso la *corretta* unità di misura, includendo il fattore c).

8.1 Alcuni Problemi di Cinematica Relativistica

1. Problema

Due treni di lunghezza *propria* L_0 sono in moto l'uno verso l'altro (su binari paralleli!), entrambi con velocità V rispetto ai binari. Si determini il tempo necessario perché uno dei due treni "passi" interamente davanti agli occhi del macchinista dell'altro treno, ma misurato da un osservatore in quiete sui binari.

Svolgimento:

Per un osservatore solidale col primo treno (treno A), la lunghezza dell'altro (il treno B) è data da:

$$L_B' = \frac{L_0}{\gamma'} = \sqrt{1 - \beta'^2} L_0, \quad (85)$$

come conseguenza della *contrazione di Lorentz* delle lunghezze, e dove $\beta' = V_B'/c$, con V_B' la velocità del treno B rispetto al treno A . Questa può essere determinata dalla legge della *somma delle velocità* ottenuta in precedenza e data dalle eq.(23) e (78); troviamo così:

$$V_B' = \frac{V + V}{1 + \frac{V V}{c^2}} = \frac{2\beta c}{1 + \beta^2}, \quad (86)$$

ovvero:

$$\beta' = \frac{V_B'}{c} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}; \quad (87)$$

pertanto per il relativo *fattore di Lorentz* γ' si ottiene:

$$\frac{1}{\gamma'} = \sqrt{1 - \beta'^2} = \sqrt{1 - \frac{4\beta^2}{(1 + \beta^2)^2}} = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}, \quad (88)$$

e perciò:

$$\gamma' = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}. \quad (89)$$

Sostituendo questo risultato nell'eq.(85) si ottiene per la lunghezza del treno B , percepita da un osservatore solidale col treno A , la seguente espressione:

$$L_B' = \left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \right) L_0. \quad (90)$$

Il tempo necessario perché il macchinista del treno A (secondo il *proprio* orologio) si veda passare davanti l'intero treno B è perciò dato da:

$$t' = \frac{L_B'}{V_B'} = \left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \right) L_0 \cdot \frac{1 + \beta^2}{2\beta c} = \frac{(1 - \beta^2) L_0}{2V}. \quad (91)$$

E quindi in definitiva, se misurato da un orologio solidale coi binari, questo tempo sarà, a causa della *dilatazione temporale* di Lorentz:

$$t = \gamma t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{L_0}{2V} (1 - \beta^2) = \frac{L_0}{2V} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (92)$$

2. Problema

Si vuole inviare dalla Terra un segnale elettromagnetico ad un razzo in modo tale che arrivi nel tempo t_1' (*noto*) nel sistema di riferimento del razzo. In quale istante t_0 del sistema di riferimento terrestre è necessario inviarlo? Si supponga che il razzo viaggi a velocità V e sia partito all'istante $t = 0$, coincidente per entrambi i sistemi di riferimento.

Svolgimento:

Nel sistema di riferimento terrestre le equazioni corrispondenti all'istante in cui il segnale elettromagnetico raggiunge il razzo sono le seguenti:

$$\begin{cases} x_1 = V t_1, \\ x_1 = c(t_1 - t_0), \end{cases} \quad (93)$$

dove ovviamente t_1 è l'istante di arrivo del segnale secondo il tempo terrestre. Da queste equazioni si ottiene quindi:

$$t_1 = \frac{t_0}{1 - \beta}, \quad (94)$$

(con $\beta = V/c$). Utilizzando le trasformazioni di Lorentz (15) possiamo esprimere le coordinate spazio-temporali osservate nel sistema di riferimento del razzo in termini di quelle osservate da Terra:

$$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - \beta c t_1), \\ c t_1' = \gamma(c t_1 - \beta x_1). \end{cases} \quad (95)$$

Poiché il razzo si trova evidentemente sempre nell'origine del proprio sistema di riferimento, si ha $x_1' = 0$, cosicché:

$$x_1 = \beta c t_1 = V t_1. \quad (96)$$

Utilizzando questa relazione nella seconda delle eq.(95), si ottiene quindi:

$$c t_1' = \gamma (c t_1 - \beta x_1) = \gamma (c t_1 - \beta^2 c t_1) = \gamma c t_1 (1 - \beta^2) = \sqrt{1 - \beta^2} c t_1, \quad (97)$$

ovvero, dalla (94):

$$t_1' = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{t_0}{1 - \beta} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} t_0, \quad (98)$$

da cui, in definitiva, si arriva al risultato cercato:

$$t_0 = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} t_1' = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}} t_1'. \quad (99)$$

9 Cinematica Relativistica nei processi di decadimento e di “scattering” in Fisica delle Particelle

Sia nei processi di decadimento che in quelli di “scattering” (*urti*), le particelle coinvolte costituiscono un *sistema isolato*, per cui in entrambi i casi devono valere le stesse leggi di *conservazione* già note dalla fisica classica, ovvero quelle dell'energia, della quantità di moto (o *impulso*) e del momento angolare. Poiché, come abbiamo visto nel § 5, in *Relatività* l'energia e l'impulso costituiscono rispettivamente la componente temporale e le componenti spaziali di un unico 4-vettore, il “*quadrimpulso*”, potremo semplicemente dire che in questi processi è proprio questo 4-vettore che si conserva.

Per semplicità, a meno che venga detto altrimenti, utilizzeremo qui sempre le *Unità Naturali* già introdotte in precedenza, in cui $c = 1$. In Fisica delle Particelle, è spesso conveniente utilizzare due particolari sistemi di riferimento, quello cosiddetto del “*Laboratorio*” (*Lab.*), solidale coi rilevatori e con l'osservatore, e quello del “*Centro di Massa*” (*CM*), rispetto al quale l'impulso totale del sistema è chiaramente nullo²⁰: ($\mathbf{P}_{tot}^* = \sum_i \mathbf{p}_i^* = 0$).

Se consideriamo per esempio l'urto di una particella incidente di energia E_1 , massa m_1 e impulso \mathbf{p}_1 , contro una particella *bersaglio* in quiete (nel sistema del Laboratorio, *Lab.*) di massa m_2 , potremo scrivere i rispettivi 4-impulsi come: $P_1^\mu = (E_1; \mathbf{p}_1)$, con $(P_1)^2 \equiv P_1^\mu P_{1\mu} = (P_0)^2 - |\mathbf{p}_1|^2 = m_1^2$, e $E_1 = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}$, e $P_2^\mu = (m_2; \vec{0})$, con $(P_2)^2 = m_2^2$. Di conseguenza, risulta che il 4-impulso totale iniziale, cioè prima del processo di *scattering*, può essere scritto $P_{in}^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu = (E_1 + m_2; \mathbf{p}_1)$, che deve essere uguale a quello totale degli stati finali, in virtù della sua conservazione. D'altra parte, nel Sistema del *CM*, i 4-impulsi iniziali della particella incidente (1) e della particella *bersaglio* (2) si possono esprimere come $P_1^{*\mu} = (E_1^*; \mathbf{p}^*)$ e $P_2^{*\mu} = (E_2^*; -\mathbf{p}^*)$, con $E_1^* = \sqrt{m_1^2 + |\mathbf{p}^*|^2}$ e $E_2^* = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}^*|^2}$. Pertanto il 4-impulso totale iniziale (che deve essere di nuovo uguale a quello totale finale) nel sistema del centro di massa (*CM*) risulta essere $P_{in}^{*\mu} = (E_1^* + E_2^*; \vec{0})$.

Altro concetto spesso utilizzato nello studio dei processi di *scattering* in Fisica delle Particelle è quello di “*Massa Invariante*”, definita come la radice quadrata del modulo al quadrato del 4-impulso totale, che come tutti i moduli

²⁰Solitamente, si indicano con un asterisco (*) le grandezze riferite al Sistema del Centro di Massa (*CM*).

dei 4-vettori, è chiaramente un *invariante relativistico*. Dimostreremo adesso che questa quantità non è altro che l'energia totale nel sistema del *CM*. Abbiamo, infatti:

$$\sqrt{s} = \sqrt{(P_{in}^*)^2} = \sqrt{P_{in}^{*\mu} P_{in\mu}^*} = \sqrt{(P_1^* + P_2^*)^2} = \sqrt{(E_1^* + E_2^*)^2} = E_1^* + E_2^* \equiv E_{in}^*, \quad \text{q.e.d.} \quad (100)$$

Per questo motivo spesso la *massa invariante* del sistema viene direttamente detta “energia nel *CM*”. Naturalmente, pur essendo una quantità relativisticamente invariante, la sua espressione assume in sistemi di riferimento diversi forme distinte. Più specificatamente, nel caso qui esaminato di una particella di massa m_1 ed energia E_1 incidente su una particella bersaglio di massa m_2 in quiete nel *Sistema del Laboratorio (Lab.)*, si ha:

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= \sqrt{(P_{in})^2} = \sqrt{P_{in}^\mu P_{in\mu}} = \sqrt{(P_1 + P_2)^2} = \sqrt{(E_1 + m_2)^2 - |\mathbf{p}_1|^2} = \sqrt{E_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2 - |\mathbf{p}_1|^2} = \\ &= \sqrt{m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2 - |\mathbf{p}_1|^2} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2}, \end{aligned} \quad (101)$$

che per elevati valori dell'energia E_1 , cioè nel caso in cui la particella incidente sia *ultra-relativistica* ($\gamma_1 \gg 1$ e quindi $E_1 \gg m_1, m_2$) si riduce alla:

$$\sqrt{s} \simeq \sqrt{2 E_1 m_2}. \quad (102)$$

Nel caso più generale in cui entrambe le particelle iniziali sono in moto nel sistema del *Lab.*, come avviene spesso nei processi di *scattering*, la *Massa Invariante* assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= \sqrt{(P_1 + P_2)^2} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|^2} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 - |\mathbf{p}_1|^2 - |\mathbf{p}_2|^2 - 2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2} = \\ &= \sqrt{m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2 + 2 E_1 E_2 - |\mathbf{p}_1|^2 - |\mathbf{p}_2|^2 - 2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2} = \\ &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 E_2 - 2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| \cos \theta_{12}}, \end{aligned} \quad (103)$$

dove θ_{12} è l'angolo compreso tra gli impulsi delle due particelle iniziali interagenti. Ancora nell'ipotesi di particelle ultra-relativistiche, $E_i \gg m_i$ ($i = 1, 2$), questa espressione si riduce alla:

$$\sqrt{s} \simeq \sqrt{2 E_1 E_2 (1 - \cos \theta_{12})}, \quad (104)$$

essendo $|\mathbf{p}_i| = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \simeq E_i$ ($i = 1, 2$). Nel caso di collisioni “*head-on-head*”, in cui le particelle incidenti si scontrano nel *Lab.* una contro l'altra ($\theta_{12} = 180^\circ$) con uguali energie, $E_1 = E_2 = E$, si ottiene ovviamente:

$$\sqrt{s} \simeq 2 E. \quad (105)$$

9.1 “Energia di Soglia” di una Reazione

Una delle tante applicazioni del concetto di massa invariante introdotto nel precedente §, insieme alla conservazione del 4-impulso totale per un sistema isolato, è la cosiddetta “Energia di Soglia” (*Threshold Energy*) di un processo

di scattering. Tale energia è definita come la *minima energia cinetica* che deve avere nel sistema del *Lab.* la particella incidente su una particella *bersaglio* in quiete, per poter produrre nello stato finale certe particelle. Più specificatamente, è quell'*energia cinetica iniziale in corrispondenza della quale le particelle emergenti sono prodotte in quiete nel sistema del CM.*

Consideriamo per esempio una particella di massa m_1 , energia E_1 e impulso \mathbf{p}_1 (nel *Lab.*) incidente su una particella *bersaglio* in quiete (sempre nel *Lab.*) di massa m_b , e si supponga che nell'urto siano prodotte n particelle nello stato finale, di masse m_f , ($f = 1, 2, \dots, n$). I 4-impulsi nello stato iniziale, espressi nel *Lab.*, sono perciò dati da:

$$P_1^\mu = (E_1; \mathbf{p}_1), \quad P_2^\mu = (m_b; \vec{0}), \quad (106)$$

mentre il 4-impulso totale dello stato finale, espresso però nel sistema del *CM*, può essere scritto come:

$$P_{out}^{\star\mu} = \sum_f P_f^{\star\mu} = \left(\sum_f E_f^*; \vec{0} \right), \quad (107)$$

dove si è tenuto conto che in tale sistema è sempre nullo il vettore dell'impulso totale: $\sum_f \mathbf{P}_f^* = 0$. Sfruttando quindi la conservazione del 4-impulso: $P_{in}^\mu = P_{out}^\mu$, e l'invarianza relativistica della cosiddetta "massa invariante", possiamo scrivere che:

$$s = (P_{in}^\mu)^2 = (P_1^\mu + P_2^\mu)^2 = (P_{out}^\mu)^2 = (P_{out}^{\star\mu})^2 = \left(\sum_f P_f^{\star\mu} \right)^2; \quad (108)$$

d'altra parte il quadrato del 4-impulso iniziale risulta essere:

$$\begin{aligned} (P_{in}^\mu)^2 &= (E_1 + m_b)^2 - |\mathbf{p}_1|^2 = E_1^2 - |\mathbf{p}_1|^2 + m_b^2 + 2m_b E_1 = m_1^2 + m_b^2 + 2m_b E_1 = \\ &= m_1^2 + m_b^2 + 2m_b(m_1 + T_1) = (m_1 + m_b)^2 + 2m_b T_1, \end{aligned} \quad (109)$$

dove T_1 è l'energia cinetica nel *Lab.* della particella incidente (di massa m_1), mentre quello del 4-impulso finale (calcolato però di nuovo nel sistema del *CM*) è:

$$(P_{out}^{\star\mu})^2 = \left(\sum_f P_f^{\star\mu} \right)^2 = \left(\sum_f E_f^* \right)^2 = \left\{ \sum_f \sqrt{m_f^2 + |\mathbf{p}_f^*|^2} \right\}^2 \geq \left(\sum_f m_f \right)^2, \quad (110)$$

dove il segno di uguaglianza corrisponde per l'appunto al caso in cui le particelle nello stato finale sono prodotte in quiete nel sistema del *CM*. Pertanto, poiché la *Massa Invariante* (\sqrt{s}) deve essere la stessa, dalle eq.(108), (109), e (110), si arriva infine alla seguente condizione:

$$s = (m_1 + m_b)^2 + 2m_b T_1 \geq \left(\sum_f m_f \right)^2, \quad (111)$$

da cui possiamo dedurre che il minimo valore possibile dell'energia cinetica T_1 (nel *Lab.*) della particella incidente, compatibile con la produzione delle n particelle nello stato finale è data dalla formula:

$$T_{1(min)} = \frac{(\sum_f m_f)^2 - (m_1 + m_b)^2}{2 m_b}; \quad (112)$$

questa è l'“Energia (Cinetica) di Soglia” (o “Threshold (kinetic) Energy”), a cui corrisponde la seguente Energia minima:

$$E_{1(min)} = T_{1(min)} + m_1 = \frac{(\sum_f m_f)^2 - (m_1^2 + m_b^2)}{2 m_b}. \quad (113)$$

Cerchiamo di chiarire maggiormente questo concetto di *Energia di Soglia*, fornendo un paio di esempi.

1. Problema

Si determini la minima energia cinetica che devono avere i protoni (p) di un fascio incidente su un bersaglio d'idrogeno (protoni pressoché in quiete nel *Lab.*) per poter produrre nello stato finale un *antiprotone* (\bar{p}).

Svolgimento:

In virtù della *conservazione del “Numero Barionico”*²¹, la reazione *minima* è la seguente:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}. \quad (114)$$

L'eq.(112) ci permette allora di concludere che la relativa “energia (cinetica) di soglia” dei protoni incidenti deve essere:

$$T_{p(min)} = \frac{(4 m_p)^2 - (2 m_p)^2}{2 m_p} = 6 m_p, \quad (115)$$

ovvero, ripristinando (temporaneamente) il fattore c^2 :

$$T_{p(min)} = 6 m_p c^2 \simeq 6 \cdot 938 \text{ MeV} \simeq 5.6 \text{ GeV}, \quad (116)$$

e quindi il fascio incidente deve essere caratterizzato dalla seguente energia minima (per protone):

$$E_{p(min)} = T_{p(min)} + m_p c^2 = 7 m_p c^2 \simeq 6.6 \text{ GeV}, \quad (117)$$

corrispondente a un *fattore di Lorentz*:

$$\gamma_p = \frac{E_{p(min)}}{m_p c^2} \simeq 7. \quad (118)$$

²¹Si assegna un *Numero Barionico* +1 a tutti i “barioni” (particelle soggette all'*Interazione forte* costituite da tre *quark*, come il *protone* ed il *neutrone*), un *Numero Barionico* -1 agli “anti-barioni”, cioè alle loro antiparticelle, ed un *Numero Barionico* nullo a tutte le altre (sia ai “leptoni”, come gli *elettroni*, i *muoni*, e i loro *neutrini*, che ai “mesoni”, come i *pioni* e i *kaoni*).

2. Problem

Determine the *Threshold Energy* for a gamma ray to create an electron-positron pair ($e^+ e^-$) in an interaction with an electron at rest. [Wisconsin Univ., USA]

Solution:

From the conservation of “Lepton Number”²², the reaction is:

$$\gamma + e^- \rightarrow e^+ + e^- + e^-.$$

At threshold the *invariant-mass-squared* is:

$$s = (P_\gamma + P_{e^-})^2 = (E_\gamma + m_e)^2 - |\mathbf{p}_\gamma|^2 = (3m_e)^2, \quad (119)$$

where we have used the fact that in the *Lab.* system, the 4-momenta of the initial particles are, respectively:

$$P_\gamma^\mu = (E_\gamma; \mathbf{p}_\gamma), \quad P_{e^-}^\mu = (m_e; \vec{0}), \quad (120)$$

and that, at threshold, in the final state $s = (3m_e)^2 = 9m_e^2$. With $E_\gamma = |\mathbf{p}_\gamma|$ (since the photon mass is zero, $m_\gamma = 0$, its invariant 4-momentum squared is always zero: $P_\gamma^2 = 0$) we then get: $E_\gamma = 4m_e \simeq 2 \text{ MeV}$, (since $m_e = 0.511 \text{ MeV}$). We could have got the same result also just applying eq.(113):

$$E_{\gamma(\min)} = \frac{(3m_e)^2 - m_e^2}{2m_e} = 4m_e. \quad (121)$$

9.2 Problemi Vari

Concludiamo queste *Dispense-Appunti* con un certo numero di ulteriori problemi risolti, tutti sull’applicazione della *Relatività Ristretta* Einsteiniana alla Fisica delle Particelle.

1. Problema [Univ. Pisa, 2019]

Un protone (massa $m_p = 940 \text{ MeV}$) si muove con velocità diretta nel verso positivo dell’asse x con impulso pari a m_p (unità $c = 1$), mentre un fotone di energia E_γ si muove in direzione opposta (chiameremo questo sistema di riferimento Sistema del Laboratorio (SL)).

- Determinare il valore di soglia di E_γ affinché possa avvenire la reazione $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$.
- Si supponrà nel seguito che l’energia del fotone valga $E_\gamma = m_p/5$. Determinare la velocità del centro di massa nel SL .
- Determinare l’energia massima (E_{max}) e minima (E_{min}) del pione neutro π^0 nel SL .
- Argomentare se il protone finale può essere emesso nel SL con un angolo maggiore di 90° rispetto alla direzione positiva delle x .

Svolgimento:

²²In analogia col *Numero Barionico*, si assegna un *Numero Leptonico* $+1$ a tutti i “leptoni” (come l’elettrone, il muone μ^- , e i rispettivi *neutrini* ν_e e ν_μ), ed un *Numero Leptonico* -1 alle loro antiparticelle. A tutti gli *adroni*, ovvero a tutti i *barioni* e a tutti i *mesoni* si assegna evidentemente un *Numero Leptonico* nullo.

- (a) Il processo che ci viene chiesto di studiare è il seguente:

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi^0.$$

Dai dati del problema possiamo dedurre la forma dei 4-impulsi iniziali (delle particelle incidenti). Partendo dal protone, sapendo che ha un impulso $p_p \equiv |\mathbf{p}_p| = m_p$, si ottiene che la sua energia è data da $E_p = \sqrt{p_p^2 + m_p^2} = \sqrt{2} m_p$, cosicché il suo 4-impulso si può esprimere come $P_p^\mu = (E_p; \mathbf{p}_p) = (\sqrt{2} m_p; m_p \hat{i})$. Per il fotone, d'altra parte, poiché l'invariante del quadrato del suo 4-impulso è nullo (infatti, essendo nulla la sua massa si trova che: $P_\gamma^2 = E_\gamma^2 - p_\gamma^2 = m_\gamma^2 = 0$), e tenendo conto che esso si muove in verso opposto a quello del protone, si ottiene che il suo 4-impulso è dato da: $P_\gamma^\mu = (E_\gamma; -E_\gamma \hat{i})$. Con questi 4-vettori possiamo calcolare il quadrato della *Massa Invariante* del sistema, pari al quadrato dell'energia totale nel sistema del *CM*, ottenendo il seguente risultato:

$$\begin{aligned} s &= (P_p + P_\gamma)^2 = P_p^2 + P_\gamma^2 + 2 P_p^\mu P_{\gamma\mu} = m_p^2 + 0 + 2 E_p E_\gamma - 2 \mathbf{p}_p \cdot \mathbf{p}_\gamma = \\ &= m_p^2 + 2 \sqrt{2} m_p E_\gamma + 2 m_p E_\gamma = m_p^2 + 2(\sqrt{2} + 1) m_p E_\gamma. \end{aligned} \quad (122)$$

D'altra parte, in virtù della conservazione del 4-impulso, questa quantità deve restare la stessa per lo stato finale e, in virtù della sua invarianza relativistica, anche se calcolata nel sistema del *CM*, dove i rispettivi 4-impulsi sono: $P_p'^{\mu*} = (E_p'^*; \mathbf{p}'^*)$ e $P_\pi'^{\mu*} = (E_\pi'^*; -\mathbf{p}'^*)$ (cosicché, come deve essere, $P_p'^{\mu*} + P_\pi'^{\mu*} = (E_p'^* + E_\pi'^*; \vec{0})$). Da questi si ottiene per s la seguente espressione:

$$s = (P_p'^{\mu*} + P_\pi'^{\mu*})^2 = (E_p'^* + E_\pi'^*)^2 - |\vec{0}|^2 = (m_p + T_p'^* + m_\pi + T_\pi'^*)^2 \geq (m_p + m_\pi)^2, \quad (123)$$

dove si sono indicate con $T_p'^*$ e $T_\pi'^*$ le rispettive energie cinetiche nel sistema del centro di massa (*CM*). Uguagliando infine le espressioni date nelle eq.(122) e (123) si ottiene l'energia di soglia del fotone richiesta:

$$E_\gamma \geq E_\gamma^{thresh.} = \frac{m_\pi (2 m_p + m_\pi)}{2(\sqrt{2} + 1) m_p} \simeq 60 \text{ MeV}. \quad (124)$$

- (b) Sia adesso $E_\gamma = m_p/5$, come indicato nel testo del problema. Da questo segue che l'energia totale nel *SL*, calcolata per lo stato iniziale, è data da:

$$E_{SL} = E_p + E_\gamma = \sqrt{2} m_p + \frac{1}{5} m_p = \frac{5\sqrt{2} + 1}{5} m_p, \quad (125)$$

mentre il vettore del 3-impulso risulta essere:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\gamma = \hat{i} (m_p - E_\gamma) = \hat{i} (m_p - \frac{1}{5} m_p) = \frac{4}{5} m_p \hat{i}, \quad (126)$$

di modulo quindi uguale a: $p \equiv |\mathbf{p}| = \frac{4}{5} m_p$. Per sua stessa definizione, la *velocità del CM* v_{CM} è allora data da:

$$v_{CM} = \frac{|\mathbf{p}|}{E_{SL}} = \frac{\frac{4}{5} m_p}{\frac{5\sqrt{2} + 1}{5} m_p} = \frac{4}{5\sqrt{2} + 1} \simeq 0.496. \quad (127)$$

- (c) Utilizzando il dato $E_\gamma = m_p/5$ nell'eq.(122), possiamo concludere che l'energia nel sistema del *CM*, data da \sqrt{s} , è uguale a:

$$E_{CM} = \sqrt{s} = m_p \sqrt{\frac{1}{5} (7 + 2\sqrt{2})} \simeq 1.402 m_p \simeq 1318 \text{ MeV}. \quad (128)$$

Esprimendo questa stessa energia in termini del modulo p'^* del momento del protone e del pione nello stato finale (sempre nel CM), si può scrivere che:

$$E_{CM} = E_p^* + E_\pi^* = \sqrt{m_p^2 + (p'^*)^2} + \sqrt{m_\pi^2 + (p'^*)^2}. \quad (129)$$

Quadrando questa equazione si trova che:

$$m_p^2 + (p'^*)^2 + m_\pi^2 + (p'^*)^2 + 2\sqrt{[m_p^2 + (p'^*)^2][m_\pi^2 + (p'^*)^2]} = (E_{CM})^2, \quad (130)$$

da cui:

$$2\sqrt{[m_p^2 + (p'^*)^2][m_\pi^2 + (p'^*)^2]} = (E_{CM})^2 - m_p^2 - m_\pi^2 - 2(p'^*)^2. \quad (131)$$

Quadrando di nuovo, e dopo qualche semplice passaggio algebrico, si arriva dunque a determinare il modulo quadro dell'impulso delle particelle finali nel CM :

$$p'^* = \frac{1}{2E_{CM}} \sqrt{[(E_{CM})^2 - m_p^2 - m_\pi^2]^2 - 4m_p^2 m_\pi^2}. \quad (132)$$

Questo risultato ci permette quindi di trovare l'energia del pione in tale sistema, che risulta essere data da:

$$E_\pi^* = \sqrt{m_\pi^2 + (p'^*)^2} = \frac{E_{CM}^2 + m_\pi^2 - m_p^2}{2E_{CM}} \simeq 331 \text{ MeV}. \quad (133)$$

Per ottenere le corrispondenti grandezze nel sistema del Laboratorio (SL), occorre effettuare un'opportuna *Trasformazione di Lorentz*, corrispondente ad un "fattore di Lorentz" γ dato da:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{CM}^2}} = \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5\sqrt{2} + 1} \right)^2 \right\}^{-1/2} = \dots = \frac{5\sqrt{2} + 1}{\sqrt{5(7 + 2\sqrt{2})}} \simeq 1.152. \quad (134)$$

Utilizzando direttamente l'eq.(70), con la matrice inversa della (49), si trova che l'energia del pione nel SL è data da:

$$E_\pi = \gamma (E_\pi^* + v_{CM} \cos\theta^* p_\pi^*), \quad (135)$$

dove θ^* è l'angolo che forma l'impulso del pione finale con l'asse x (direzione di incidenza del protone iniziale). Da questo risultato si può chiaramente concludere che i valori *minimo* e *massimo* dell'energia del pione nel SL sono dati da:

$$\begin{cases} E_\pi(\text{min}) = \gamma (E_\pi^* - v_{CM} p_\pi^*) \simeq 209 \text{ MeV}, \\ E_\pi(\text{max}) = \gamma (E_\pi^* + v_{CM} p_\pi^*) \simeq 554 \text{ MeV}. \end{cases} \quad (136)$$

- (d) Dai risultati ottenuti nei punti precedenti, possiamo facilmente determinare anche l'energia nel CM del protone finale, come segue:

$$E_p'^* = E_{CM} - E_\pi^* = E_{CM} - \frac{E_{CM}^2 + m_\pi^2 - m_p^2}{2E_{CM}} = \frac{E_{CM}^2 + m_p^2 - m_\pi^2}{2E_{CM}} \simeq 987 \text{ MeV}, \quad (137)$$

da cui possiamo dedurre che in tale sistema la sua velocità è data da:

$$v_p'^* = \frac{p'^*}{E_p'^*} = \frac{\sqrt{[(E_{CM})^2 - m_p^2 - m_\pi^2]^2 - 4m_p^2 m_\pi^2}}{E_{CM}^2 + m_p^2 - m_\pi^2} \simeq 0.305. \quad (138)$$

Poiché $v_p'^* < v_{CM}$ e v_{CM} è diretta nel verso positivo dell'asse delle x , che è la direzione di incidenza del protone iniziale, la componente in questa stessa direzione della velocità del protone emergente sarà pertanto sempre positiva, il che significa che l'angolo di scattering del protone sarà sempre acuto, ovvero $< 90^\circ$.

2. Problema [UC, Berkeley]

An accelerator under study at SLAC²³ has as output bunches of electrons and positrons which are made to collide head-on. The particles have 50 GeV in the Laboratory. Each bunch contains 10^{10} particles, and may be taken to be a cylinder of uniform charge density with a radius of $1 \mu\text{m}$ and a length of 2 mm as measured in the Laboratory.

- To an observer traveling with a bunch, what are the radius and length of its bunch and also the one of opposite sign ?
- How long will it take the two bunches to pass completely through each other as seen by an observer traveling with a bunch ?
- How much is such a time interval as measured in the laboratory ?

Svolgimento:

- Consideriamo una particella P del grappolo (bunch) che viaggia con l'osservatore. Siano Σ e Σ_0 i sistemi di riferimento del Laboratorio (SL) e quello solidale con l'osservatore (e quindi anche con la particella P), rispettivamente, e sia $+x$ la direzione e il verso del moto di P . Il fattore di Lorentz di P , e perciò di Σ_0 , in Σ è dato dal rapporto:

$$\gamma = \frac{E}{m c^2} = \frac{50 \text{ GeV}}{0.51 \text{ MeV}} \simeq 10^5. \quad (139)$$

Di conseguenza, la lunghezza L ($= 2 \text{ mm}$) del grappolo percepita (*i.e., misurata*) da un osservatore solidale col laboratorio (sistema Σ), risulta essere contratta rispetto alla cosiddetta "lunghezza propria" del grappolo L_0 , la lunghezza cioè che sarebbe misurata nel sistema ad esso solidale (sistema Σ_0):

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0, \quad (140)$$

per la quale si ottiene quindi:

$$L_0 = \gamma L = 10^5 \cdot 2 \text{ mm} = 200 \text{ m}. \quad (141)$$

D'altra parte, essendo il raggio dei grappoli perpendicolare al moto stesso, questo resta immutato, $r_0 = r = 1 \mu\text{m}$, non subendo alcuna *contrazione di Lorentz*.

Il grappolo dei *positroni* e^+ viaggia in direzione opposta ($-x$) rispetto alla direzione del moto del grappolo degli *elettroni* e^- , con una velocità che nel sistema del laboratorio Σ è pari a $-\beta c$, dove β è ottenibile dal fattore di Lorentz: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$. Nel nostro caso, con $\gamma = 10^5$, chiaramente $\beta \simeq 1$, poiché a questa energia i due fasci sono ultrarelativistici, e le particelle si muovono alla velocità della luce. Per ottenere la velocità dei positroni, vista da un osservatore solidale col grappolo degli elettroni (sistema Σ_0), dobbiamo utilizzare l'eq.(77) per la somma relativistica di velocità dirette in verso opposto l'una rispetto all'altra; nel nostro caso, si arriva così a:

²³ "Stanford Linear Accelerator Collider".

$$\beta' = \frac{-\beta - \beta}{1 - \beta(-\beta)} = -\frac{2\beta}{1 + \beta^2}. \quad (142)$$

Di conseguenza, la lunghezza di questo grappolo (di positroni), vista nel sistema Σ_0 (cioè vista dagli elettroni dell'altro grappolo) è perciò contratta (rispetto alla lunghezza propria L_0), e risulta essere:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{L_0}{\gamma'} = L_0 \sqrt{1 - \beta'^2} = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2\beta}{1 + \beta^2}\right)^2} = \left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}\right) L_0 = \frac{L_0}{2\gamma^2 - 1} = \\ &= \frac{200 \text{ m}}{2 \cdot (10^5)^2 - 1} \simeq 10^{-8} \text{ m} = 0.01 \text{ } \mu\text{m}. \end{aligned} \quad (143)$$

- (b) Per ottenere il tempo necessario all'attraversamento reciproco dei due grappoli di particelle, dobbiamo dapprima metterci nel sistema Σ_0 solidale col fascio di elettroni. In tale sistema questo tempo è dato da:

$$t' = \frac{L_0 + L'}{\beta' c} \simeq \frac{(200 + 10^{-8}) \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \simeq 6.67 \cdot 10^{-7} \text{ s}, \quad (144)$$

dove si è tenuto conto che con ottima approssimazione $\beta = \beta' = 1$.

- (c) Questo stesso tempo, se misurato nel sistema del laboratorio Σ , è invece dato da:

$$t = \frac{L}{\beta c} = \frac{2 \text{ mm}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \simeq 6.7 \cdot 10^{-12} \text{ s}, \quad (145)$$

chiaramente in accordo con la legge della *dilatazione temporale* di Lorentz:

$$t' = \gamma t = 10^5 \cdot 6.7 \cdot 10^{-12} \text{ s} = 6.7 \cdot 10^{-7} \text{ s}. \quad (146)$$

3. Problema

Che energia deve avere un neutrone ($m_n = 940 \text{ MeV}$; $\tau_0 = 13 \text{ min}$) proveniente dalla stella α -Centauri ($d \simeq 5 \text{ l.y.}$) per poter raggiungere la Terra alla fine della sua *vita media* ?

Svolgimento:

Poiché se non ci fossero gli effetti relativistici il neutrone potrebbe percorrere solo uno spazio $s = c\tau_0 \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 13 \cdot 60 \text{ s} \simeq 234 \text{ Mkm}$, pari a circa una volta e mezzo la distanza Terra-Sole, è chiaro che il neutrone deve essere *ultra-relativistico* e quindi muoversi essenzialmente alla velocità della luce. In tal caso, possiamo porre $\beta = 1$, e quindi la richiesta di poter arrivare a Terra equivale a richiedere che: $d = \gamma c\tau_0$, da cui si ottiene il *fattore di Lorentz* necessario:

$$\gamma = \frac{d}{c\tau_0} = \frac{5 \text{ (l.y.)} \cdot 365 \text{ (days/yr)} \cdot 24 \text{ (h/day)} \cdot 60 \text{ (min/h)}}{13 \text{ (min)}} \simeq 2 \cdot 10^5, \quad (147)$$

a cui corrisponde un'energia pari a:

$$E = \gamma m_n c^2 \simeq 2 \cdot 10^5 \cdot 940 \text{ MeV} \simeq 200 \text{ TeV}. \quad (148)$$

4. Problema

Una coppia di pioni aventi carica elettrica opposta (π^+ e π^-), entrambi di massa $m_\pi = 140$ MeV, vengono fatti collidere in laboratorio. Se entrambe le particelle hanno un'energia pari a 1 GeV, quant'è la velocità con cui ciascuna vede venirsi incontro l'altra? Queste particelle decadono per processo *debole* in un muone ed un neutrino muonico: $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \bar{\nu}_\mu$, con una "vita media" *propria* $\tau_0 = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s. Quant'è la loro "vita media" nel *Sistema del Laboratorio*? Dal punto di vista di uno dei due pioni, ... quant'è la "vita media" dell'altro? ... e di se stesso?

Svolgimento:

Supponendo che i due pioni vadano uno contro l'altro provenienti da direzioni opposte, è evidente che il *Sistema del Laboratorio* coincide in questo caso col *Sistema del Centro di Massa (CM)*. Il fattore di Lorentz di ciascun pione (ovvero del sistema di riferimento ad esso solidale) nel Laboratorio, si ottiene dividendo la sua energia per la sua massa (a riposo)²⁴:

$$\gamma_\pi \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_\pi^2}} = \frac{E_\pi}{m_\pi} = \frac{1 \text{ GeV}}{140 \text{ MeV}} = 7.14, \quad (149)$$

da cui è possibile ottenerne la velocità:

$$\beta_\pi = \frac{1}{\gamma_\pi} \sqrt{\gamma_\pi^2 - 1} = 0.990. \quad (150)$$

Dalla formula della somma relativistica delle velocità data in eq.(trasfimp5) possiamo quindi calcolare la velocità con cui uno dei due pioni vede venirsi incontro l'altro:

$$\beta_{\pi'} = \frac{\beta_\pi + \beta_\pi}{1 + \beta_\pi \beta_\pi} = \frac{2\beta_\pi}{1 + \beta_\pi^2} = \frac{2\sqrt{\gamma_\pi^2 - 1}}{2\gamma_\pi - \frac{1}{\gamma_\pi}} \simeq 1, \quad (151)$$

come ci si sarebbe dovuto già aspettare.

La vita media dei pioni nel Sistema del Laboratorio è dilatata del relativo fattore di Lorentz rispetto a quella *propria* τ_0 :

$$\tau_\pi(\text{Lab}) = \gamma_\pi \tau_0 = 7.14 \cdot 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s} \simeq 1.86 \cdot 10^{-7} \text{ s}. \quad (152)$$

Infine, per poter calcolare la vita media di un pione, nel sistema di riferimento solidale con l'altro, è necessario determinare il fattore di Lorentz che lega questi due sistemi, ciascuno dei quali in moto con velocità $\beta_{\pi'}$ rispetto all'altro; si trova così:

$$\gamma_{\pi'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\pi'}^2}} = \left\{ 1 - \frac{4(\gamma_\pi^2 - 1)}{\gamma_\pi^2 \left(2 - \frac{1}{\gamma_\pi^2}\right)^2} \right\}^{-1/2} = \dots = 2\gamma_\pi^2 - 1 \simeq 2 \cdot 7.14^2 - 1 \simeq 101. \quad (153)$$

Da questo risultato possiamo perciò concludere che ciascun pione vede l'altro con una *vita media* pari a:

$$\tau_{\pi'} = \gamma_{\pi'} \tau_0 \simeq 101 \cdot 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s} \simeq 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ s}. \quad (154)$$

Infine, è evidente che, per sua stessa definizione, nel proprio sistema di riferimento la vita media di ciascuno dei due pioni è quella *propria*: $\tau_0 = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s.

²⁴Ricordiamo che in tutti i problemi affrontati in questa parte sono utilizzate le *Unità Naturali*, nelle quali $c = 1$.

5. Problem

A neutral particle at rest lives $4.5 \cdot 10^{-6}$ s and its mass is $500 \text{ MeV}/c^2$. How energetic must such a particle be to reach the target 10 km away? How much would be its momentum? And its kinetic energy?

Svolgimento:

Poiché lo spazio che la particella potrebbe percorrere alla velocità della luce, se non ci fossero gli effetti relativistici, sarebbe di solo $c \tau_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 4.5 \cdot 10^{-6} \text{ s} \simeq 1.35 \text{ km}$ ($\ll 10 \text{ km}$), ciò significa che la possibilità di raggiungere il *target* è proprio dovuta alla dilatazione temporale di Lorentz, possibile solo supponendo che in effetti la velocità sia molto prossima a quella della luce. In tal caso, uguagliando il tempo impiegato a percorrere la distanza richiesta $L = 10 \text{ km}$ a tale velocità con la *vita media (dilatata)* nel *Sistema del Laboratorio (SL)*, si trova la condizione:

$$\tau = \frac{L}{c} = \gamma \tau_0, \quad (155)$$

da cui possiamo ottenere il fattore di Lorentz necessario, uguale al rapporto tra l'energia della particella e la sua massa:

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{L}{c \tau_0}; \quad (156)$$

l'energia richiesta dal problema è quindi:

$$E = \frac{m L}{c \tau_0} = 500 \text{ MeV} \cdot \left(\frac{10 \text{ km}}{1.35 \text{ km}} \right) \cdot 3.7 \text{ GeV}. \quad (157)$$

La sua energia cinetica è semplicemente la differenza tra questa energia e quella a riposo (uguale alla sua massa a riposo, nelle unità qui utilizzate):

$$T = E - m \equiv (\gamma - 1) m = 3.7 \text{ GeV} - 0.5 \text{ GeV} = 3.2 \text{ GeV}. \quad (158)$$

Infine, per il suo impulso si trova:

$$p = \gamma m v \equiv \sqrt{E^2 - m^2} \simeq \sqrt{3.7^2 - 0.5^2} \text{ GeV}/c \simeq 3.67 \text{ GeV}/c. \quad (159)$$

6. Problema

Una certa particella *instabile*, di massa $M = 100 \text{ GeV}$, viene accelerata fino ad una energia pari a $E = 1 \text{ TeV}$.

- Si determini il suo fattore di Lorentz γ e la sua velocità v . Possiamo ritenere *relativistica* tale particella?
- Si determini la sua "massa relativistica" e la sua energia cinetica.
- Quanto vale la sua *vita media* nel *Laboratorio*, se quella *propria* è $\tau_{0M} = 10^{-6} \text{ s}$?
- Alla sua velocità, quanto spazio riuscirebbe a percorrere prima di decadere?
- Consideriamo il caso in cui la suddetta particella, supposta adesso in quiete nel sistema del *Laboratorio*, decade in due particelle identiche di massa $m = 40 \text{ GeV}$. Si determini l'energia cinetica e la quantità di moto di quest'ultime. Potremmo dire che tali particelle sono relativistiche?
- Se anche queste particelle "*figlie*" decadessero con una *vita media propria* $\tau_0' = 10^{-9} \text{ s}$, che spazio percorrerebbero nel *Laboratorio*?

Svolgimento:

- (a) Utilizzando le stesse formule già impiegate nello svolgimento dei precedenti problemi, si ottiene per il fattore di Lorentz nel Laboratorio della particella M , il seguente risultato:

$$\gamma_M \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_M^2}} = \frac{E}{M} = \frac{1 \text{ TeV}}{100 \text{ GeV}} = 10, \quad (160)$$

da cui si trova per la velocità di M :

$$\beta_M = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_M^2}} = 0.995, \quad (161)$$

ovvero una velocità pari a circa il 99.5 % della velocità della luce; pertanto tale particella può senz'altro definirsi *relativistica*.

- (b) La *massa relativistica* della particella è semplicemente pari alla sua “energia”, e quindi uguale a 1 TeV. L'energia cinetica, quindi, è data da:

$$T = (\gamma - 1) M \equiv E - M = 1 \text{ TeV} - 100 \text{ GeV} = 900 \text{ GeV}. \quad (162)$$

- (c) Nel Laboratorio la sua Vita Media è quindi relativisticamente *dilatata* dal fattore di Lorentz (160):

$$\tau_M = \gamma_M \tau_{0M} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 10^{-5} \text{ s}. \quad (163)$$

- (d) Alla velocità della particella (pressoché uguale a quella della luce), lo spazio che riuscirebbe a percorrere prima di decadere sarebbe quindi:

$$L = v \tau_M = \beta_M c \tau_M = \beta_M \gamma_M c \tau_{0M} = \sqrt{\gamma_M^2 - 1} c \tau_{0M} \simeq \sqrt{10^2 - 1} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 10^{-6} \text{ s} \simeq 3 \text{ km}. \quad (164)$$

- (e) Se la particella (diciamo A) di massa M , supposta adesso in quiete nel Laboratorio, decade in due particelle (diciamo B) identiche, di massa m , dalla conservazione della quantità di moto sappiamo che queste avranno i 3-vettori dell'impulso uguali e opposti: $\mathbf{p}_{B1} = -\mathbf{p}_{B2}$, per cui, dovendosi conservare anche l'energia, potremo scrivere che:

$$E_{0M} \equiv M = E_{B1} + E_{B2} = 2 E_B = 2 \sqrt{p_B^2 + m^2}, \quad (165)$$

da cui, oltre ad ottenere l'ovvio risultato: $E_{B1} = E_{B2} \equiv E_B = M/2 = 50 \text{ GeV}$, si può determinare il modulo del loro momento:

$$p_B \equiv |\mathbf{p}_B| = \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} \text{ GeV}/c = 30 \text{ GeV}/c. \quad (166)$$

La loro energia cinetica è quindi: $T_B = E_B - m = (50 - 40) \text{ GeV} = 10 \text{ GeV}$. Inoltre, essendo il loro fattore di Lorentz nel Laboratorio uguale a: $\gamma_B = E_B/m = 50/40 = 1.25$, se ne deduce che la velocità di queste particelle è:

$$\beta_B = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_B^2}} \simeq 0.6, \quad (167)$$

cioè circa il 60 % della velocità della luce, per cui non potrebbero essere dette troppo relativistiche.

- (f) Se anch'esse decadessero in laboratorio (dove adesso la particella A è in quiete), la loro vita media risulterebbe essere (poco) dilatata di Lorentz del fattore γ_B :

$$\tau_B = \gamma_B \tau_{0B} \simeq 1.25 \cdot 10^{-9} \text{ s}, \quad (168)$$

corrispondente ad uno spazio percorso dato da:

$$L_B = v_B \tau_B = \beta_B \gamma_B c \tau_{0B} = \sqrt{\gamma_B^2 - 1} c \tau_{0B} = \sqrt{1.25^2 - 1} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 10^{-9} \text{ s} \simeq 22.5 \text{ cm}. \quad (169)$$

7. Problem

A beam of $N = 10^9$ particles, each having a (rest) mass of $m = 1.78 \cdot 10^{-27}$ kg has been accelerated up to a kinetic energy of $T = 1.6 \cdot 10^{-10}$ J.

- How much are the mass and the speed of these particles at such energy ?
- If their lifetime (at rest) is $\tau_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ s, what is the (average) number (in the Lab.) of the “survived” particles after $\bar{t} = 10$ ns ?
- What is the length of the path of the beam at such time ?

Svolgimento:

- Per convenienza, esprimiamo tutte le quantità nelle usuali unità di misura utilizzate in Fisica delle Particelle. La massa delle particelle del fascio risulta così:

$$m c^2 = 1.78 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ J} \equiv \frac{1.6 \cdot 10^{-10}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 1 \text{ GeV}, \quad (170)$$

mentre la loro energia cinetica è:

$$T = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ J} \equiv \frac{1.6 \cdot 10^{-10}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 1 \text{ GeV}. \quad (171)$$

La loro energia, in virtù dell'eq.(82), è semplicemente data dalla loro somma:

$$E = \gamma m = m + T = (1 + 1) \text{ GeV} = 2 \text{ GeV}, \quad (172)$$

a cui corrisponde un fattore di Lorentz uguale a $\gamma = \frac{E}{m} = 2$, e perciò una velocità: $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = \sqrt{3}/2 \simeq 0.866$, pari a circa l'87% della velocità della luce.

- Nel Laboratorio la *vita media* delle particelle del fascio è conseguentemente dilatata, e data da:

$$\tau = \gamma \tau_0 \simeq 2 \cdot 5 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 10^{-7} \text{ s}. \quad (173)$$

- Utilizzando infine questo valore nella ben nota “legge esponenziale del decadimento”, troviamo che il numero di particelle del fascio *sopravvissute* dopo un tempo $\bar{t} = 10^{-8}$ s è:

$$N(\bar{t}) = N_0 e^{-\bar{t}/\tau} = 10^9 \cdot \exp\left(-\frac{10^{-8} \text{ s}}{10^{-7} \text{ s}}\right) = 10^9 \cdot e^{-0.1} \simeq 9 \cdot 10^8, \quad (174)$$

pari a circa il 90% di quelle iniziali.

(d) Infine, lo spazio percorso da queste particelle prima del decadimento, è dato da:

$$L = v \bar{t} = \beta c \bar{t} = 0.866 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 10^{-8} \text{ s} \simeq 2.6 \text{ m}. \quad (175)$$

8. Problem

Let's consider the following scattering process: $A + B \rightarrow C + D$, and suppose that in the *Lab. system* the target particle B is at rest. If the particle masses are, respectively, $m_A = 100 \text{ MeV}$, $m_B = 1 \text{ GeV}$, $m_C = 500 \text{ MeV}$, $m_D = 1.5 \text{ GeV}$, determine the *Kinetic Threshold energy* of the incident particle A for the process.

Svolgimento:

Questo problema può essere risolto applicando direttamente l'eq.(112) ottenuta al §9.1:

$$T_A(\text{thresh.}) = \frac{(m_C + m_D)^2 - (m_A + m_B)^2}{2 m_B} = \frac{(0.5 + 1.5)^2 - (0.1 + 1)^2}{2} \text{ GeV} \simeq 1.4 \text{ GeV}. \quad (176)$$

10 Conclusion

Dopo aver presentato un certo numero di problemi (risolti), nei quali si è voluto dare qualche esempio di applicazione della Relatività alla cinematica dei decadimenti e dei processi di scattering caratteristici di Fisica delle Particelle, concludiamo questi *Appunti*, che ci auguriamo possano essere di qualche utilità per gli studenti Liceali (e non solo), per la loro preparazione all'*Esame di stato*, o per gli Studenti Universitari che devono preparare un esame che includa alcuni elementi introduttivi di "Teoria della Relatività (Ristretta)".

Esistono tantissimi libri riguardanti la Teoria della Relatività Ristretta, alcuni più elementari, altri a un livello più avanzato. Anche sul WEB si può trovare dell'ottimo materiale. Per gli studenti interessati ad approfondire qualche specifico argomento non c'è che l'imbarazzo della scelta. Qui abbiamo deciso di includere nella *bibliografia* che segue solo un paio di titoli, che riteniamo potrebbero essere di una certa utilità per lo studio di questo argomento.

References

- [1] Stefano Ranfone, *Complementi di Fisica*, Pisa, ETS, 2016.
- [2] Albert Einstein, *"Il significato della relatività"*, Torino, Einaudi, 1950.
- [3] Landau e Lifshits, *"Fisica Teorica (vol. 2), Teoria dei Campi"*, Roma, Editori Riuniti, 1976.
- [4] Leonard Susskind & Art Friedman, *"Special Relativity and Classical Field Theory"*, Penguin Books, 2018. [Italian Edition: *"Relatività ristretta e teoria classica dei campi"*, Milano, Raffaello Cortina Editore, 2018].
- [5] Riccardo Paramatti, *"Cinematica Relativistica"*, (2011); URL: <http://www.roma1.infn.it/cms/ric/cinematica.pdf>
- [6] M. Artioli, D. Babusci, G. Dattoli, *"Appunti di Relatività Ristretta e di Cinematica Relativistica"*, (2012); INFN-12-18-LNF

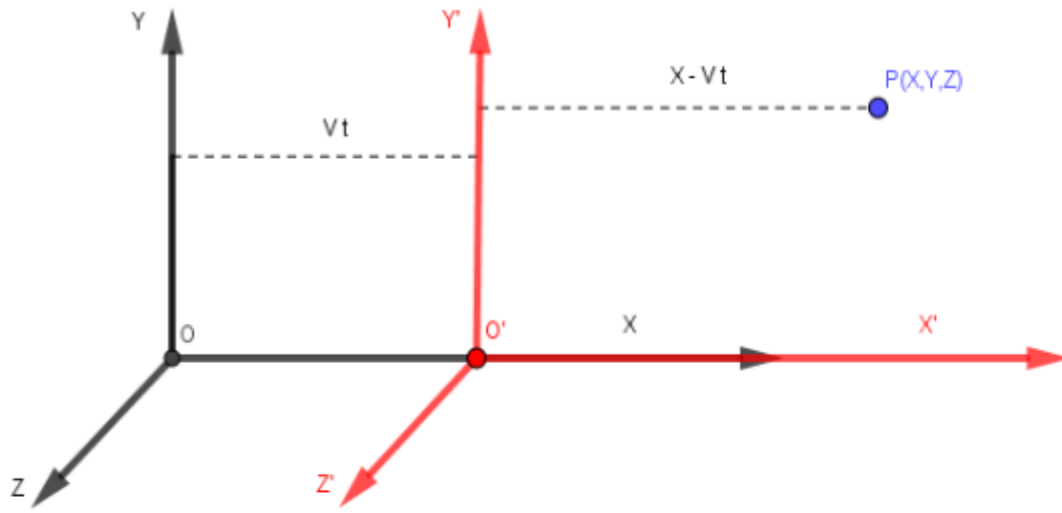
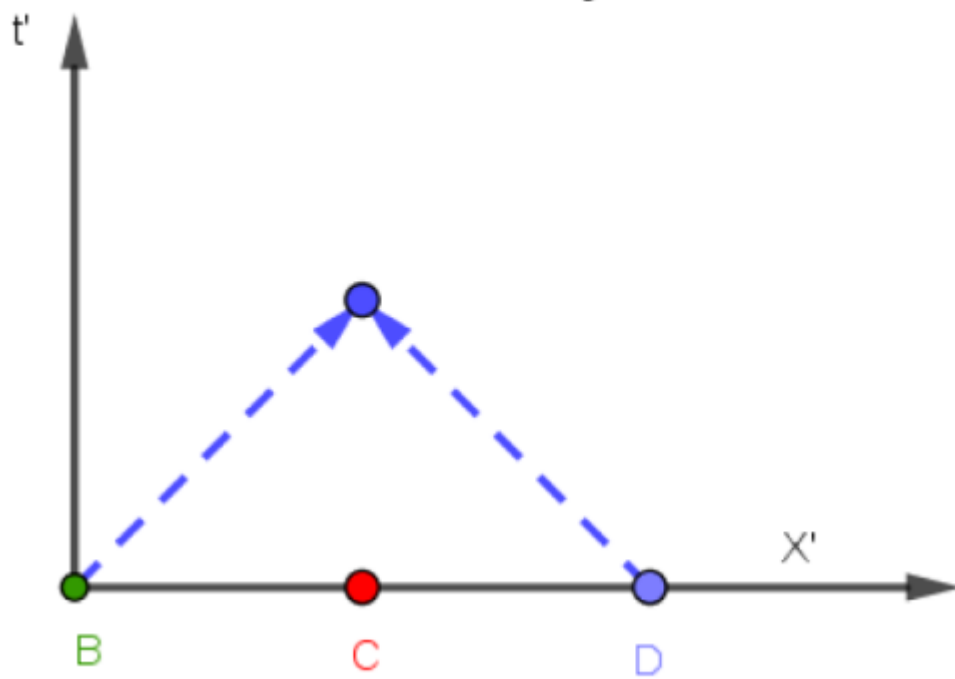


Fig. n. 1

Fig. n. 2



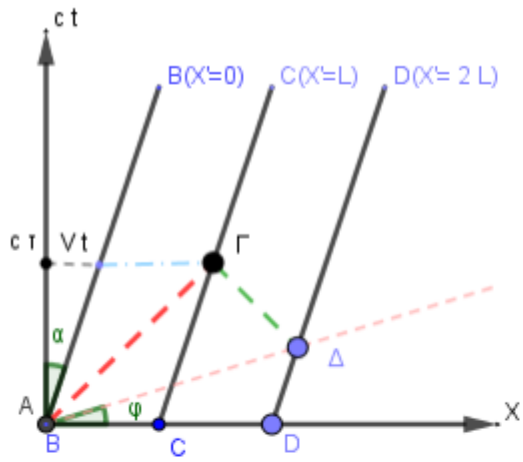


Fig. n. 3

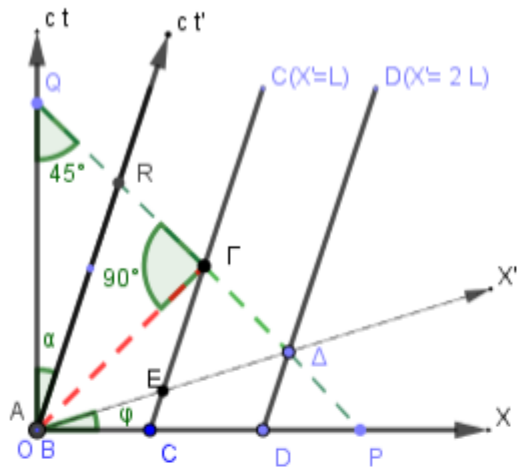


Fig. n. 4

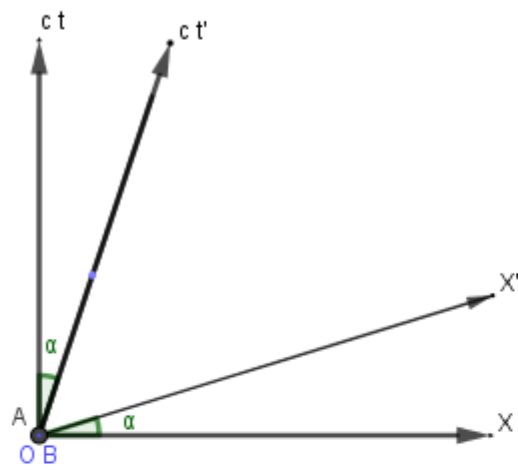


Fig. n. 5