Esercizio sugli urti elastici: l'Undicesimo Teorema di Huygens

Stefano Ranfone *

Problema.

Si considerino tre sferette allineate e libere di muoversi. La prima, di massa M e avente una velocità iniziale V, urti centralmente la sferetta intermedia X di massa x inizialmente in quiete. Questa, a sua volta, urterà quindi la terza sferetta, di massa m, pure inizialmente in stato di quiete. Supponendo che entrambi gli urti siano perfettamente elastici, si dimostri il cosiddetto *Undicesimo Teorema di Huygens*, secondo il quale si otterrà la massima velocità finale per la terza sferetta se la massa della sferetta intermedia x è data dalla *media geometrica* delle masse della prima e della terza: $x = \sqrt{M\,m}$.

Svolgimento

Si tratta di un doppio urto elastico. Dapprima la sferetta di massa M urta elasticamente con velocità V quella intermedia di massa x, inizialmente ferma. Per ottenere le rispettive velocità dopo questa prima collisione è sufficiente applicare i risultati ottenuti in [1] e in [2], nel caso in cui la particella urtata abbia una velocità iniziale nulla; nel nostro caso si ottiene quindi:

$$V' = \left(\frac{M-x}{M+x}\right) V \;, \qquad {v_x}' = \left(\frac{2M}{M+x}\right) V \;. \tag{1}$$

La velocità ${v_x}'$ è però la velocità con cui la sferetta intermedia urta successivamente la terza, pure inizialmente ferma; per cui, applicando di nuovo la stessa formula, possiamo scrivere per la velocità finale di quest'ultima la seguente espressione:

$$ {v_m}'' = \left(\frac{2x}{x+m}\right) {v_x}' = \left(\frac{2x}{x+m}\right) \left(\frac{2M}{M+x}\right) V \; = \frac{4MxV}{Mx + Mm + x^2 + mx} \,. \tag{2}$$

Per ottenere il valore della massa della sferetta intermedia x per il quale la velocità della terza sferetta risulta essere la massima possibile, è sufficiente porre uguale a zero la derivata della *funzione* ${v_m}''(x)$, considerando la massa x come variabile. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{d{v_m}''(x)}{dx} = \frac{4MV(Mx + Mm + x^2 + mx) - 4MVx\,(2x + M + m)}{(Mx + Mm + x^2 + mx)^2} = 0 \,, \tag{3}$$

da cui si arriva, dopo qualche semplificazione algebrica, al risultato cercato, in accordo con quanto affermato dal cosiddetto[1] *"Undicesimo Teorema di Huygens"*:

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

[1] Così denominato, per esempio, da Pietro di Martino, nel Primo Tomo dei suoi *"Philosophiae Naturalis Institutionum libri tres"*, [3], a pag. 190.

$$x = \sqrt{M\, m}\,. \tag{4}$$

References

[1] Stefano Ranfone, *Complementi di Fisica*, Pisa, ETS, 2016.

[2] Stefano Ranfone, *“Su una trattazione alternativa dell’Urto Elastico del XVIII secolo”*, (2018); URL: https://www.academia.edu/37346287/

[3] Pietro Di Martino, *“Philosophiae Naturalis Institutionum libri tres”* (3 voll.), Napoli (1738).