

Alcune considerazioni sull'origine del Principio di Minima Azione: Pietro di Martino e Maupertuis

Stefano Ranfone *

Abstract

Questo articolo fa seguito ad un lavoro scritto poco più di un anno fa [1], in cui ci eravamo occupati di presentare la Prima Versione in italiano del “Principio di Minima Azione” di Maupertuis, così come veniva presentata nel suo “Saggio di Cosmologia” (1768), nella traduzione di Orazio degli Arrighi Landini. Nel presente lavoro, vogliamo invece sollevare la questione della paternità stessa di questo Principio, universalmente attribuita al filosofo francese. In effetti, sei anni prima che venisse presentata all’Académie Royale des Sciences di Parigi (1744), una versione pressoché identica, anch’essa limitata nell’applicazione alla sola rifrazione della luce, era già stata proposta dal matematico napoletano Pietro Di Martino, in una sorta di “post-scriptum” fatto aggiungere proprio prima della stampa, all’inizio del primo volume della sua opera maggiore, le “Philosophiae Naturalis Institutionum libri tres” (1738). Questo fatto, forse poco noto, anche se può mettere in dubbio l’originalità della sua idea, non toglie comunque al filosofo francese il grande merito di aver intuito l’enorme portata del Principio di Minima Azione, con la sua estensione alla meccanica dei corpi materiali presentata nel 1746.

[In a work written more than a year ago [1], we presented the first italian version (1768) of the “Maupertuis’ Principle of Least Action” as given in his “Essay on Cosmology”, in the translation of Orazio degli Arrighi Landini. In the present paper we wish to discuss about the paternity of this Principle, universally attributed to the french philosopher. Indeed, six years before being presented at the Académie Royale des Sciences in Paris (1744), an almost identical version had already been given by a neapolitan mathematician, Pietro Di Martino, in a sort of “post-scriptum” added, just before its printout, at the beginning of the first volume of his main work, the “Philosophiae Naturalis Institutionum” libri tres” (1738). This fact, although it may induce some doubt about the originality of his idea, it does not take away from the french philosopher the great merit of having understood the enormous importance of the Principle of Least Action, through its extension to all mechanics of material bodies (1746).]

Keywords: Maupertuis, Pietro di Martino, Fermat, Principio di Minima Azione, Rifrazione della luce.

1 Introduzione

In un articolo scritto poco più di un anno fa [1], ci siamo interessati alla *Prima Versione in Lingua Italiana* di uno tra i più importanti principi della Fisica, o forse sarebbe più corretto definirlo uno dei principi fondamentali della stessa *Natura*: il “Principio di Minima Azione” di Maupertuis. Insieme al (forse meno noto) “Teorema di Noether”, è ancora oggi uno degli strumenti più efficaci che abbiamo per lo studio e la costruzione di *Modelli Dinamici*, attraverso i quali comprendere la natura della materia e delle *Interazioni fondamentali*, sia nel contesto delle teorie quantistiche di campo (QFT) che della *Teoria delle Stringhe*, e della *Relatività Generale*.

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

Questa *Prima Versione in Lingua Italiana* apparve nella traduzione dal francese operata da Orazio degli Arrighi Landini del “Saggio di Cosmologia” del Maupertuis, stampato a Venezia nel 1768 da Francesco Sansoni [2]. La versione originale del *Principio di Minima Azione*, presentata a Parigi in una memoria letta a dì 15 Aprile 1744 nella *Assemblea pubblica della Real Accademia delle Scienze*¹, era stata pubblicata in francese nel 1748 nell’*Histoire de l’Academie Royale des Sciences, Année M.DCCXLIV*, col titolo “*Accord de différentes loix de la Nature qui avoient jusqu’ici paru incompatibles*” [3]. In questa sua prima apparizione, tuttavia, il *Principio* veniva applicato esclusivamente al fenomeno della rifrazione della luce. Solo successivamente, nel 1746, Maupertuis lo generalizzò estendendolo all’intera Meccanica, nel suo Saggio “*Recherche des Loix du Mouvement*”², fornendone anche esplicite applicazioni allo studio degli urti di corpi materiali. Inoltre il *Principio* venne descritto, sempre in francese, anche nella prima edizione del suo “*Essai de Cosmologie*”, stampata nel 1751 [5]. Tutti i saggi vennero poi ristampati nelle *Oeuvres* di Maupertuis, nelle edizioni lionesi [4] (in 4 volumi) del 1756 e del 1768³. Il *Principio* trovò poi la sua forma definitiva ed elegante ad opera di Eulero e Lagrange prima, e di Hamilton e Jacobi poi, quando costituì uno dei capisaldi dell’intera *Meccanica Analitica*.

In Fisica il nome di Maupertuis è fondamentalmente legato proprio al *Principio di minima Azione*, la cui paternità è solitamente data per certa. Tuttavia, come già notato anche da altri autori prima di noi [6], [7], un *Principio* del tutto analogo a quello di Maupertuis, almeno nella sua versione originale in cui veniva applicato al solo studio della rifrazione della luce, era già stato proposto dal matematico napoletano Pietro di Martino sei anni prima, nel 1738, contenuto all’interno di una sorta di *post-scriptum* (di sole due carte, senza numerazione) dal titolo: “*Monita quaedam ad Lectorem*”, fatto aggiungere prima della stampa definitiva, a seguito del frontespizio del primo volume della sua Opera principale, le “*Philosophiae Naturalis Institutionum libri tres*” [8]. Indorato e Nastasi [6], nel loro articolo del 1989, nel quale veniva analizzata in particolar modo la *risoluzione* proposta dal Di Martino a proposito della disputa tra Fermat e Descartes sulla rifrazione della luce [8], [9], ritengono improbabile che Maupertuis potesse essere stato a conoscenza del lavoro del matematico napoletano, e che quindi potesse da quest’ultimo aver avuto una qualche ispirazione per la formulazione de suo *Principio di Minima Azione*. Noi al riguardo abbiamo invece qualche dubbio in più, dubbio alimentato dall’analisi comparativa del testo dei *Monita ad Lectorem* dello stesso Di Martino con quello della *Memoria* del 1744 ([3], [4]) del francese. Le similitudini presenti, pur non potendosi definire conclusive, ci inducono tuttavia a non escludere del tutto che in qualche modo Maupertuis possa aver avuto accesso ad una copia delle “*Philosophiae Naturalis Institutiones*”. Indipendentemente da ciò, non potremmo comunque mettere in discussione il merito del francese nell’aver intuito la portata e la validità generale del *Principio di Minima Azione*, estendendolo all’intera Dinamica, nonostante anch’egli inizialmente lo avesse applicato esclusivamente alla luce, come del resto aveva fatto lo stesso Di Martino.

Per avvalorare la nostra tesi, nei §§ 3 e 4 forniremo la nostra traduzione, sia del Saggio di Maupertuis “*Accord de différentes Loix de la Nature*”⁴, che dei “*Monita quaedam ad Lectorem*” del Di Martino. Prima di presentare questi due testi, vogliamo tuttavia portare un’altra testimonianza a favore della possibile paternità del *Principio di Minima Azione* da parte del filosofo napoletano, quella dell’Abate Rosmini, che nel Cap. VIII del Libro Terzo della sua *Teodicea* (a pag. 281 delle sue *Opere Edite e Inedite*, [7]) scrive la seguente *Nota* relativa al Di Martino: «*Pietro Martino [sic] dimostrò il primo che il minimo che si trova nel corso della luce per varj mezzi di densità è il risultato della velocità collo spazio percorso, di maniera che, segnate le velocità che la luce tiene in due mezzi colle lettere a, b ; e gli spazi percorsi colle lettere x, y , minimo riesca il valor della formola $ax + by$. Se allo spazio ed alla velocità s’aggiunge la massa de’corpi e , generalizzando il principio, si dica che in tutti i movimenti che accadono nell’universo si verifica sempre che sia minima⁵ MSV , cioè la massa moltiplicata collo spazio percorso e colla velocità, se n’ha quella che Maupertuis chiamò “legge della menoma azione”. Questa legge, come fu concepita da Maupertuis, avrebbe bisogno di lunghi ragionamenti, per dimostrare che cosa ha di esatto e che d’inesatto, ne’ quali non possiamo noi entrare nella brevità d’una nota, né sono necessari al presente nostro*

¹Così si esprime l’Autore nel suo “Saggio di Cosmologia”, a pag. 28 della prima edizione italiana [2] del 1768.

²Saggio letto all’*Académie Royale des Sciences de Berlin* nel 1746, incluso nel IV volume delle *Oeuvres* del francese, stampate a Lione nel 1756 e nel 1768, [4].

³Nell’edizione delle *Oeuvres* stampata in unico volume a Dresda nel 1752, tra i saggi che menzionavano o trattavano il *Principio di Minima Azione*, era incluso solo il “Saggio di cosmologia”.

⁴Per la nostra traduzione dal francese, abbiamo utilizzato sia il testo della *Memoria* originale del 1744 ([3], pag. 417), che quello della versione inclusa nel vol. IV delle *Oeuvres*, nell’edizione lionese del 1768 ([4], pag.16).

⁵Dove, evidentemente, Rosmini pone: $M =$ Massa, $S =$ Spazio percorso, e $V =$ Velocità.

intendimento. Ci basterà d’osservare che la legge della menoma azione, come la concepisce Maupertuis, dee esser combinata e corretta con quella della “conservazione delle forze vive” che dobbiamo ad Huygens; poiché nella formola di Maupertuis le forze vive non vengono calcolate. >>. Non è che uno scarno riferimento al contributo del Di Martino alla formulazione del Principio di Minima Azione, ma è sufficiente a farci capire che almeno in alcuni ambienti accademici si era consapevoli della precedenza cronologica della sua Opera.

2 Di Martino e la sua esposizione della rifrazione della luce

Prima di presentare la nostra traduzione dei due testi, riteniamo che possa essere utile e interessante anche ricordare come Di Martino aveva esposto l’argomento della rifrazione della luce nel corpo della sua opera [8], cioè prima di realizzare che avrebbe potuto ottenere gli stessi risultati attraverso l’applicazione del *suo Principio di minimo*, applicazione che espone nelle due carte fatte aggiungere appena prima della stampa a seguito del frontespizio del primo volume. Al fenomeno della rifrazione della luce viene dedicato l’intero Capitolo IV della *Sezione Terza* del Primo Libro delle *“Philosophiae Naturalis Institutionum”* ([8], da pag. 271 a pag. 285). Fondamentalmente, Di Martino, ispirandosi all’idea che esista attorno ad ogni corpo una sorta di sottile *“atmosfera”*, idea suggerita anche dal fenomeno della diffrazione della luce [10], [11], cerca di spiegare la differenza di comportamento tra la rifrazione della luce e l’analogo fenomeno tra corpi materiali, ovvero la penetrazione in un mezzo più denso di un corpo proveniente obliquamente da un mezzo diverso di minor densità. In questo caso, infatti, penetrando nel secondo mezzo il corpo si allontana dalla perpendicolare (alla superficie che separa i due mezzi), cosicché l’angolo di *rifrazione* risulta essere maggiore di quello di incidenza. La spiegazione *meccanica* è molto semplice e suggerita dallo studio degli urti obliqui. Il maggior angolo di rifrazione è infatti dovuto all’effetto di una sorta di *forza di repulsione* causata dalla maggior resistenza incontrata dal corpo nel secondo mezzo, dovuto alla sua maggior densità. D’altra parte, nel caso della rifrazione della luce, il comportamento opposto, ovvero il fatto che nel passaggio di questa da un mezzo meno denso ad un mezzo più denso si osservi un minor angolo di rifrazione rispetto a quello di incidenza, e quindi un avvicinamento del raggio di luce alla perpendicolare, secondo Di Martino può essere spiegato con la maggior *attrazione* generata dal sottile strato di *atmosfera* adiacente al secondo mezzo, più denso, rispetto a quella del primo mezzo, meno denso. In tutto ciò gioca un ruolo determinante l’idea dell’attrazione *gravitazionale* di Newton, direttamente proporzionale alla quantità di materia. Essenzialmente, questa è la stessa spiegazione che venne presentata anche dal filosofo francese Clairaut⁶ all’*Académie Royale des Sciences* di Parigi il 24 luglio 1739, cioè un anno dopo la pubblicazione delle *“Institutionum”* da parte del matematico napoletano. Va sottolineato, tuttavia, che lo stesso Di Martino probabilmente considerava tale spiegazione più un *modello* teorico che una vera e propria descrizione reale della rifrazione, come sembrano suggerire le sue stesse parole ([8], pag. 278): *“[453] Adest, & tertia opinio, quae attractionem cum resistantia consociat. Haec si non verior, at saltem phaenomenis refractionum explicandis videtur accomodatior”*. Sottolineiamo anche che Di Martino, peraltro, non accettò neppure la spiegazione che Leibniz aveva proposto mezzo secolo prima (1682), poiché la riteneva logicamente contraddittoria. Ricordiamo che Leibniz, essenzialmente in risposta al *Principio di Fermat* secondo il quale i raggi di luce si propagano in modo tale da minimizzare i tempi, propose un principio alternativo, secondo il quale le traiettorie dei raggi luminosi sono le *“più facili”* possibili, nel senso che sono quelle caratterizzate dalla minor *difficoltà*. Ipotizzò poi che tale *difficoltà* (\mathcal{D}) potesse essere quantificata dalla somma dei prodotti delle lunghezze di ciascun percorso (l_i , dove l’indice $i = 1, 2, \dots$ identifica l’ i -esimo mezzo) moltiplicate per la corrispondente *“resistenza del mezzo”* (\mathcal{R}_i):

$$\mathcal{D} = \sum_i l_i \mathcal{R}_i. \quad (1)$$

Limitandoci al caso della rifrazione tra due soli mezzi (il mezzo 1, da dove incide la luce prima della rifrazione, caratterizzato da una *minor* densità ρ_1 , e il mezzo 2, di *maggior* densità ρ_2 , dove emerge il raggio rifratto), e riferendosi alla *Fig.1* per le notazioni⁷, la richiesta di *minima difficoltà* è equivalente a richiedere che:

⁶1713-1765.

⁷La stessa *Figura* utilizzata nel precedente articolo, [1].

$$\mathcal{D} = AC \mathcal{R}_1 + CB \mathcal{R}_2 = \text{minima}, \quad (2)$$

ovvero che:

$$\mathcal{D} = \sqrt{x_C^2 + y_A^2} \mathcal{R}_1 + \sqrt{(d - x_C)^2 + y_B^2} \mathcal{R}_2 = \text{minima}. \quad (3)$$

Poiché le ordinate y_A e y_B , come pure la distanza d , sono costanti, l'unica variabile che resta è x_C , che caratterizza la posizione del punto in cui avviene l'effettiva rifrazione. La condizione di *minimo* per \mathcal{D} implica pertanto l'annullamento della sua *derivata* rispetto a questa variabile:

$$\frac{d\mathcal{D}}{dx_C} = \frac{x_C \mathcal{R}_1}{\sqrt{x_C^2 + y_A^2}} - \frac{(d - x_C) \mathcal{R}_2}{\sqrt{(d - x_C)^2 + y_B^2}} = 0, \quad (4)$$

ovvero:

$$\mathcal{R}_1 \sin \theta_1 = \mathcal{R}_2 \sin \theta_2, \quad (5)$$

essendo θ_1 e θ_2 , rispettivamente, gli angoli di incidenza e di rifrazione, come mostrato nella stessa *Fig.1*. In effetti questo risultato, ricavato da Leibniz, si accorda perfettamente con quello - *errato*⁸ - ottenuto sia da Cartesio che, come vedremo nei §§3 e 4, da Maupertuis e dallo stesso Di Martino, almeno nell'ipotesi plausibile secondo cui la resistenza che la luce incontra in un mezzo sia direttamente proporzionale alla sua densità (cosicché: $\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1 = \rho_2 / \rho_1 > 1$, in accordo con quanto osservato sperimentalmente). La contraddizione logica di questa soluzione proposta da Leibniz è, secondo Di Martino, la necessità di supporre che la velocità sia *maggiore* laddove è maggiore anche la resistenza incontrata. Secondo il filosofo napoletano, infatti, la *resistenza* dovrebbe essere maggiore nel mezzo in cui la velocità di propagazione è minore, e quindi nel mezzo meno denso (sempre nell'ipotesi "*errata*" di Descartes, Newton e Maupertuis, seguita dallo stesso di Martino). Per questo motivo il filosofo napoletano preferì adottare, almeno nel *corpo* del suo libro ([8], pagg. 271-285), la soluzione che attribuiva il comportamento della luce osservato nella rifrazione, all'effetto della maggior "*attrazione*" causata dal sottile strato di *atmosfera* adiacente al mezzo più denso.

Come abbiamo già accennato, dopo la stesura del libro, ma prima di essere mandato in stampa, Di Martino scoprì che poteva riprodurre lo stesso risultato sulla rifrazione della luce in modo diverso, ovvero ipotizzando un suo nuovo "*Principio di Minimo*", principio che espose brevemente in una *Nota* aggiuntiva di 2 carte (non numerate) fatte inserire all'inizio del vol. I della sua opera, con la dicitura "*Monita quaedam ad Lectorem*". In questa *Nota* Di Martino ipotizza che la luce si propaghi da un mezzo ad un altro (rifrazione) "*minimizzando la somma dei prodotti dei percorsi effettuati moltiplicati ciascuno per la rispettiva velocità*":

$$S_{DM} = \sum_i l_i v_i = \text{minima}. \quad (6)$$

Questo è esattamente lo stesso *Principio* che sei anni più tardi fu proposto da Maupertuis (il 15 aprile 1744) proprio per spiegare la rifrazione della luce, e la cui generalizzazione alla dinamica dei corpi materiali fatta due anni più tardi (1746) nel suo saggio "*Recherche des Lois du Mouvement*" ([4], pag. 31), portò al ben noto "*Principio di Minima Azione*". Secondo questo principio i sistemi dinamici evolvono in natura in modo tale da minimizzare la cosiddetta *Azione*, definita come la somma dei prodotti delle masse dei corpi, ciascuna moltiplicata per la lunghezza dei cammini effettuati e per la velocità con cui questi vengono percorsi:

⁸Si ricorda che i risultati di Cartesio e di Maupertuis, come pure dello stesso Di Martino, pur in accordo tra loro, sono tuttavia errati, come abbiamo ampiamente spiegato in [1], essendo compatibili con le osservazioni solo nell'ipotesi *sbagliata* di una velocità della luce maggiore nel mezzo più denso.

$$S = \sum_i l_i v_i m_i = \text{minima}. \quad (7)$$

La novità dell'inclusione della massa dei corpi nella definizione dell'Azione, assente nella *Memoria* del 1744, venne menzionata come *Nota a piè pagina* nelle edizioni successive dello stesso *Saggio*, contenute all'interno delle *Oeuvres* dell'autore (Lione, 1756 e 1768, [4], tom. IV, pag. 31.).

Come è noto, il Principio di Maupertuis (e quindi di Di Martino) risulta in realtà non applicabile al caso della rifrazione della luce, pur essendo stato ispirato proprio dallo studio di questo fenomeno, poiché, essendo in realtà la velocità della luce maggiore nei mezzi meno densi, come voluto da Fermat, è proprio il principio di quest'ultimo ad essere corretto, principio secondo il quale a dover essere minimizzato è il *tempo totale* di propagazione, e non l'Azione. Tuttavia, risulta invece corretto minimizzare quest'ultima nel caso dell'evoluzione temporale dei sistemi dinamici. Possiamo anzi affermare che il *Principio di Minima Azione* fu il punto di partenza per gli sviluppi successivi della *Meccanica Analitica*, specialmente ad opera di Lagrange, Eulero, Hamilton e Jacobi.

Il grande merito di Maupertuis fu proprio l'intuizione, di cui tuttavia non dette nei suoi scritti alcuna precisa giustificazione, della generalizzazione del risultato (peraltro successivamente rivelatosi errato!) ottenuto dallo studio della rifrazione della luce, alla Dinamica dei corpi materiali, di cui proprio nel *Saggio* del 1746 ([4], pagg. 31-42) fornì interessanti esempi di applicazione nello studio degli urti elastici e anelastici.

Resta comunque il sospetto che in qualche modo Maupertuis, almeno nel caso dello studio della rifrazione della luce, possa essere stato ispirato nel formulare il suo *Principio di Minimo dell'Azione* proprio dall'Opera di Di Martino, o più precisamente, dalla *Nota* aggiunta all'inizio del Primo Volume di quest'ultima ([8]). Nelle prossime due sezioni proponiamo le nostre traduzioni in italiano⁹ di alcuni passi rilevanti, sia dal *Saggio* di Maupertuis del 1744 (in francese), che dai "*Monita quaedam ad Lectorem*" (in latino) del matematico napoletano (1738). Dal loro confronto, secondo noi, non si può del tutto escludere una possibile influenza di quest'ultimo sul filosofo francese.

3 “Excerpta” dal Saggio « Accordo delle differenti Leggi della Natura » di Maupertuis (1744)

Dalle “*Oeuvres de Maupertuis*”, (tom. IV, pag. 16 *et segg.*; [4]):

... Meditando profondamente su questa materia¹⁰, ho pensato che la luce, quando passa da un mezzo ad un altro, abbandonando il cammino più breve, che è quello lungo una linea retta, potrebbe altresì non seguire affatto quello a cui corrisponde il tempo più breve¹¹. In effetti [*è lecito chiedersi*], per quale motivo il criterio basato sul minor tempo possibile dovrebbe essere preferibile a quello basato sul percorso più breve? Poiché non è possibile che la luce soddisfi simultaneamente i due criteri, non si capisce perché [*la luce*] dovrebbe favorirne uno piuttosto che l'altro. Ed in effetti [*risulta che*] non segue né l'uno né l'altro. Ci vuole un criterio che abbia il vantaggio di corrispondere alla situazione reale; quello che ho trovato è che il *percorso effettivo seguito dalla luce* [*nella sua rifrazione tra due mezzi distinti*] è quello per il quale la *quantità di Azione* è la minima possibile.

Resta quindi da spiegare cosa io intenda per la *quantità di Azione*. Quando un corpo viene portato da un punto ad un altro dello spazio, per far ciò si deve fare una certa azione: questa azione dipende dalla velocità che ha il corpo, e dallo spazio che esso percorre; ma non è né la velocità né lo spazio presi separatamente. La quantità di azione è tanto più grande quanto più grande è la velocità del corpo, e quanto più lungo è il cammino che esso percorre; è cioè proporzionale alla somma degli spazi moltiplicati ciascuno per la velocità con la quale questi sono

⁹Abbiamo cercato, in entrambe le traduzioni, di attenersi il più possibile ai testi originali, mantenendone la struttura sintattica, anche se piuttosto arcaica. Tuttavia, dove necessario, abbiamo inserito tra parentesi quadre piccole *integrazioni* personali, al solo fine di rendere più scorrevole il testo stesso.

¹⁰Il filosofo francese si riferisce alla *Rifrazione della luce*.

¹¹Come afferma invece il *Principio di Fermat*.

percorsi¹². La vera spesa della Natura è questa quantità di Azione; ed è ciò che [quest'ultima] risparmia il più possibile nel movimento della luce.

Si abbiano due mezzi differenti, separati da una superficie rappresentata¹³ dalla linea CD , tali che la velocità della luce nel mezzo superiore [il mezzo 1, da dove incide la luce] sia come m , e la velocità nel mezzo inferiore [il mezzo 2, dove si propaga il raggio rifratto] sia come n . Si abbia un raggio di luce, che partendo da un punto dato A , debba pervenire ad un [altro] punto dato B : per trovare il punto R dove il raggio si spezza, cerco il punto per il quale la quantità di azione è la minima possibile, cioè: $m \cdot AR + n \cdot RB$, che deve essere un minimo. O, avendo tracciato sulla superficie comune ai due mezzi, le perpendicolari AC , BD :

$$m \cdot \sqrt{AC^2 + CR^2} + n \cdot \sqrt{BD^2 + DR^2} = \min. .$$

Ovvero, poiché AC e BD sono costanti, [e ponendo uguale a zero il "differenziale" di questa espressione, si ottiene:]

$$\frac{m CR dCR}{\sqrt{AC^2 + CR^2}} + \frac{n DR dDR}{\sqrt{BD^2 + DR^2}} = 0.$$

Ma, essendo [anche] CD costante [vediamo che]: $dCR = -dDR$ [poiché: $CD = CR + RD = \text{cost.} \Rightarrow dCD = dCR + dRD = 0$]. Si ha dunque:

$$\frac{m \cdot CR}{AR} - \frac{n \cdot DR}{BR} = 0,$$

e [perciò]:

$$\frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} = n : m$$

vale a dire: "il seno [dell'angolo] d'incidenza sta al seno [di quello] di rifrazione, in ragione inversa con [il rapporto tra] le velocità che la luce ha in ciascun mezzo¹⁴.

Tutti i fenomeni della rifrazione si accordano adesso col grande principio secondo il quale la Natura, nella produzione dei suoi effetti, agisce sempre per le vie più semplici. Da questo principio segue che quando la luce passa da un mezzo ad un altro, il seno del suo angolo di rifrazione [θ_2] sta al seno del suo angolo di incidenza [θ_1] in ragione inversa [del rapporto] delle velocità che la luce ha in ciascun mezzo.

Ma questa quantità d'azione che la Natura risparmia nel movimento della luce quando questa attraversa mezzi diversi, la risparmia forse anche quando essa viene riflessa da corpi opachi e anche nella sua semplice propagazione? [la risposta è] Sì, questa quantità è sempre la più piccola possibile.

¹²Si fa notare che nell'enunciato, Maupertuis sembra riferirsi ad un qualsiasi corpo trasportato nello spazio, e non solo alla luce, pur non facendo alcuna menzione del concetto di massa. Modificherà in effetti la sua definizione della *Quantità di Azione* come in eq.(7), inserendovi appunto la massa del corpo, nel saggio successivo letto nel 1746 all'*Académie Royale des Sciences de Berlin*. In ogni caso, farà aggiungere la nota: "poiché nel caso della luce che qui stiamo considerando non si ha che un solo corpo, possiamo fare astrazione della sua massa", anche nelle ristampe del Saggio del 1744 di cui stiamo fornendo una parziale traduzione, incluse nelle sue *Oeuvres*, stampate a Lione nel 1756 e nel 1768, ([4], pag. 31). Il fatto che non si faccia alcun riferimento alla massa del corpo nella prima versione del 1744, sembra suggerire che la generalizzazione del Principio alla Dinamica dei corpi materiali, con la corretta definizione dell'azione come in eq.(7), non sia avvenuta che successivamente, per l'appunto con la stesura del saggio del 1746.

¹³Si fa riferimento alla Fig. 2, dall'originale di pag. 19 di [4].

¹⁴Ribadiamo ancora una volta che, questo risultato, comune a Descartes, Maupertuis, e allo stesso di Martino, è noto essere errato; il risultato corretto è quello che soddisfa il Principio di Fermat, secondo il quale il rapporto tra i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione è in proporzione diretta col rapporto tra le velocità della luce nei due mezzi. Si veda al riguardo, la discussione che abbiamo dato nel nostro articolo [1].

Nei due casi della riflessione e della propagazione, la velocità della luce rimane la stessa¹⁵, [e quindi] la più piccola quantità d'azione corrisponde sia al cammino più corto che al tempo più breve.

Ma questo cammino più corto e più breve non è che una conseguenza della più piccola quantità d'azione: ed è questa conseguenza che Fermat aveva preso per principio. Una volta scoperto il vero principio, deduco tutte le leggi che segue la luce, sia nella sua propagazione, che nella sua riflessione, che nella sua rifrazione.

Qui si conclude la parte della *Memoria* di Maupertuis sull' "Accord de différentes Lois de las Nature (Qui avoient jusqu'ici paru incompatibles)" più strettamente legata al *Principio di Minima Azione*. Nelle versioni successive di questo *Saggio*, stampate nel vol. IV delle *Oeuvres*, nelle edizioni lionesi ([4], pag. 23) del 1756 e del 1768, viene aggiunta una *Nota*, assente nell'originale del 1744 (ma stampato nel 1748, [3]), dove si precisa che quando l'autore aveva inviato la *Memoria* all'Accademia Reale delle Scienze di Parigi (1744), non era a conoscenza che Leibniz avesse scritto già nel 1682 una *Memoria* in cui per spiegare la rifrazione della luce aveva proposto un *Principio* per certi aspetti simili al suo. Leibniz assumeva, infatti, che nel propagarsi da un mezzo ad un altro, la luce seguisse il percorso "più facile", secondo il quale la somma dei prodotti delle lunghezze dei percorsi in ciascun mezzo per la rispettiva "resistenza" dovesse essere la minima possibile. Abbiamo già discusso dell'applicazione di questo principio alla rifrazione della luce nel §2 (eqq.(1)-(5)), a proposito delle accuse di incoerenza logica e contraddizione mosse al riguardo dal Di Martino nella sua opera [8] del 1738. Anche Maupertuis, in questa *Nota* aggiunta alla fine del suo *Saggio*, e scritta quindi presumibilmente dopo il 1744, critica la proposta di Leibniz. E ancora una volta, la critica sembra essere quasi una parafrasi di quella del Di Martino. Egli infatti afferma che sarebbe logico aspettarsi che la resistenza incontrata dalla luce fosse maggiore nel mezzo più denso. Aggiungendo che, anche se è vero che la sua applicazione porta alla stessa soluzione di Descartes, la stessa da lui (come pure dal Di Martino) ottenuta attraverso un principio diverso (quello di Minima Azione), tuttavia la sua applicazione agli altri fenomeni legati alla propagazione della luce porterebbe a notevoli difficoltà.

Come già detto, Maupertuis nell'originale del 1744 non propose di generalizzare alla Dinamica dei corpi materiali il suo *Principio*; lo fece solo nel *Saggio* successivo del 1746: "*Recherche des Lois du Mouvement*", dove, definendo l'Azione come in eq.(7), espresse nei seguenti termini la forma *definitiva* del proprio *Principio* ([4], pag. 36): *PRINCIPE GENERAL*: "*Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action, necessaire pour ce changement, est la plus petit qu'il sort possible*". Ed in effetti, in questo secondo *Saggio*, il filosofo francese applica il suo *Principio* al caso degli urti elastici ed anelastici di corpi materiali, arrivando a soluzioni corrette.

4 "Excerpta" dai « Monita quaedam ad Lectorem » di Di Martino (1738)

Qui, come già detto, forniremo la nostra traduzione (dal latino) del *post-scriptum* fatto aggiungere dal Di Martino all'inizio del primo volume della sua Opera maggiore, i "*Philosophiae Naturalis Institutionum libri tres*", stampati a Napoli da Felice Carlo Mosca nel 1738 (in tre volumi). Si tratta di due carte, senza numerazione, probabilmente inviate allo stampatore quando (almeno) il Primo volume era già pronto per essere stampato. È proprio in queste tre pagine che il Di Martino introduce il suo *Principio di Minimo*, principio che risulta essenzialmente lo stesso di quello proposto da Maupertuis nel 1744, e che fu poi esteso nel 1746 alla Dinamica dei corpi materiali. Dal confronto della traduzione (dal francese) del *Saggio* di Maupertuis data nel §3, con questa del testo del filosofo napoletano, possiamo, come detto, almeno non escludere del tutto una qualche possibile influenza di quest'ultimo sul filosofo francese.

« *Monita quaedam ad Lectorem* »: Nel Cap. IV della Sezione III del Libro I ([8], Tom. I, pag. 271 e *segg.*) dimostri contro [quanto affermato da] Pietro Fermat che il tempo del moto del raggio rifratto non è il più breve possibile. Si può dimostrare ciò anche più elegantemente col seguente ragionamento. Sia *RA* il raggio incidente¹⁶ & *AP* il raggio rifratto. Si conduca dal punto *R* al punto *P* la linea retta *RBP* [essendo *B* il punto

¹⁵Poiché la luce rimane nello stesso mezzo.

¹⁶L'autore fa riferimento alla Fig. 63 contenuta in una delle Tavole ripiegate incise in rame poste alla fine del Tomo I, che qui riproduciamo in Fig. 3.

di intersezione tra questa retta e la superficie di separazione tra i due mezzi]: affermo che il tempo corrispondente all'effettivo percorso effettuato dal raggio di luce durante la rifrazione è maggiore del tempo richiesto nel caso del percorso rettilineo¹⁷ RBP . Dai centri R & P si traccino gli archi BF , AD , di raggio RB , PA , rispettivamente. Poiché il percorso $RA + AP$ seguito dal raggio rifratto è più lungo di quello rettilineo RBP , sottraendo da entrambi le parti uguali $RB = RF$, ed anche $PA = PD$, non restano che la parte AF per il raggio rifratto [RAP] e la parte BD per quello rettilineo [RBP], con la prima maggiore della seconda. Pertanto, supponendo che la rifrazione avvenga verso la perpendicolare [nel senso che l'angolo di rifrazione, θ_2 , è minore di quello di incidenza, θ_1] come in figura [Fig. 3], che come si è dimostrato nel Capitolo [Cap. IV, Sec. III; pag. 271 e segg.] corrisponde ad avere la luce che si muove più lentamente prima dell'incidenza¹⁸ e più velocemente dopo la rifrazione, essendo il tratto AF più lungo di BD , e poiché il primo viene percorso ad una velocità minore di quella che caratterizza il secondo, ne consegue necessariamente che il tempo per AF è molto più lungo del tempo per BD ; e visto che sia i tempi per RB , RF , che i tempi per PA , PD sono chiaramente gli stessi, si trova che il tempo per $RA + AP$ è in effetti più lungo del tempo¹⁹ per RBP . E poiché si può dare la stessa dimostrazione nel caso di una "rifrazione dalla perpendicolare" [cioè una rifrazione in cui l'angolo di incidenza θ_1 è minore di quello di rifrazione θ_2 ; situazione che corrisponde al caso in cui il primo mezzo è più denso del secondo.], ne consegue che il postulato del minor tempo assunto da Fermat è completamente falso²⁰.

Ci sarà forse chi voglia difendere la tesi di Fermat, in virtù della "semplicità della Natura" che anch'essa sembra tenere in considerazione. Si ritiene infatti che la Natura sia allettata in modo meraviglioso dalla semplicità e dalla brevità, di cui possiamo ricavare innumerevoli e notevoli esempi dalla Storia Naturale; certamente nel caso della rifrazione della luce da un mezzo ad un altro non vediamo assolutamente che questa percorre la via più breve, come invece avviene nel caso della riflessione; ed è anche chiaro che [rimanendo in uno stesso mezzo] essa si propaga da luogo a luogo nel tempo più breve. Ma noi, pur non negando di cercare grandemente la semplicità e la brevità nella Natura, neghiamo tuttavia che tale semplicità richieda nel caso della rifrazione [della luce] che il tempo sia minimo [come invece vuole Fermat]. Cosa in effetti essa [cioè, la stessa semplicità della Natura] postuli e cosa debba essere minimo nel caso della rifrazione, ora andrò a discuterlo brevemente.

Risulta che nei moti si possono considerare tre grandezze che si possono richiedere essere le minime possibili, lo spazio descritto dal mobile, la velocità con la quale procede il mobile, & il tempo nel quale lo spazio viene percorso. Tuttavia, se nella rifrazione si richiede il minimo del solo spazio, o della sola velocità, o del solo tempo,

¹⁷Questa conclusione risulta vera solo nell'ipotesi, SBAGLIATA, di una velocità della luce maggiore nel mezzo (il secondo, nel semipiano inferiore, nella Fig. 3) con densità maggiore. In realtà, come è noto, il tempo trascorso durante l'effettivo percorso RAP , è in effetti il minimo possibile, in accordo col "Principio di Fermat", poiché la velocità della luce è in realtà maggiore nel mezzo meno denso (il primo mezzo, nel semipiano superiore, nella Fig. 3), come vuole lo stesso Fermat, e contrariamente a quanto affermato da Descartes, Newton, Maupertuis, e anche dal Di Martino.

¹⁸Si ribadisce che in realtà tale affermazione è errata, poiché la luce risulta essere più veloce nel mezzo meno denso (il primo) e più lenta in quello più denso (il secondo), come vuole Fermat.

¹⁹Per maggior chiarezza, forniamo qui di seguito la dimostrazione matematica di quanto affermato nel testo dal Di Martino. Dette v_1 e v_2 le velocità di propagazione della luce nel primo e nel secondo mezzo, e riferendoci sempre alla Fig. 3, possiamo scrivere il tempo di percorrenza del tragitto rettilineo RBP come:

$$t_{RBP} = \frac{RB}{v_1} + \frac{BP}{v_2} = \frac{RB}{v_1} + \frac{BD}{v_2} + \frac{DP}{v_2} = \frac{RB}{v_1} + \frac{BD}{v_2} + \frac{AP}{v_2},$$

mentre quello relativo al reale tragitto RAP del raggio rifratto come:

$$t_{RAP} = t_{AF} + t_{FA} + t_{AP} = \frac{RB}{v_1} + \frac{FA}{v_1} + \frac{AP}{v_2}.$$

La loro differenza risulta pertanto essere:

$$t_{RAP} - t_{RBP} = \frac{FA}{v_1} - \frac{BD}{v_2} = \frac{BD}{v_2} \left[\left(\frac{v_2}{v_1} \right) \left(\frac{FA}{BD} \right) - 1 \right] > 0,$$

poiché $FA > BD$ e $v_2 > v_1$ (nell'ipotesi SBAGLIATA che la velocità nel secondo mezzo, più denso, sia maggiore che nel primo). Questo conferma la tesi enunciata dal Di Martino nel testo. Naturalmente, in realtà, concordemente col Principio di Fermat, risulta il contrario; ovvero che al raggio rifratto RAP corrisponde proprio il tempo minimo possibile, con $v_2 < v_1$, e con il punto A determinato in modo da soddisfare la Legge di Snell, secondo la quale il rapporto tra i seni degli angoli di incidenza (θ_1) e di rifrazione (θ_2) è proprio uguale al rapporto tra le corrispondenti velocità della luce nei due mezzi, v_1/v_2 ; mentre per Di Martino, Maupertuis e Descartes, tale rapporto sarebbe invece dato dal reciproco del rapporto tra le rispettive velocità (v_2/v_1).

²⁰Mentre, in realtà, è assolutamente vero!

ogni indagine sarà vana: il che senza dubbio è la causa del perché su cosa debba essere imposta la condizione di minimo abbia per così tanto tempo eluso il lavoro dei Geometri. Io quindi a mia volta ho immaginato che nel caso della rifrazione si debba richiedere il minimo del prodotto tra lo spazio e la velocità, oppure tra lo spazio e il tempo, o infine tra il tempo e la velocità.

Certamente, se R è il punto [nel primo mezzo] da dove si propaga la luce, P il punto [nel secondo mezzo] che viene illuminato, e BA la superficie di separazione tra i due mezzi, ho scoperto che la rifrazione avviene nel punto A per il quale la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando le lunghezze RA , AP , per le rispettive velocità [nei due mezzi], sia la minima possibile; cioè, se a designa la velocità del raggio incidente [caratteristica del primo mezzo, che nella nostra Nota 19 abbiamo scritto v_1], & b la velocità del raggio emergente [nel secondo mezzo, da noi indicata con v_2 nella Nota 19], ho dimostrato che la quantità $RA \cdot a + AP \cdot b$ è minore di qualsiasi altra quantità similmente costituita [cioè scegliendo un qualsiasi altro punto come punto di rifrazione], come per esempio $RB \cdot a + BP \cdot b$.

Poni infatti $RA = x$ il raggio incidente [cioè, la lunghezza RA del percorso della luce nel primo mezzo, facendo ancora riferimento alla Fig. 3], ed $AP = y$ quello rifratto [cioè, la lunghezza del cammino AP nel secondo mezzo], a la velocità della luce nel primo mezzo e b quella nel secondo mezzo. Poiché [come si è detto] la quantità $ax + by$ deve essere la minima possibile, occorrerà che il suo differenziale²¹ [“fluxio”, nell’originale latino] $a dx - b dy$ sia $= 0$; cosicché risulta valida la proporzione $dx : dy = b : a$. E visto che è pure vero che dx sta a dy come il seno dell’angolo di incidenza sta al seno dell’angolo di rifrazione [cioè: $dx : dy = \sin \theta_1 : \sin \theta_2$], si ottiene che il primo seno [$\sin \theta_1$] sta al secondo seno [$\sin \theta_2$] come b sta ad a [$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{b}{a}$], ovvero come la velocità del raggio rifratto [$b = v_2$, caratteristica del secondo mezzo] sta alla velocità di quello incidente [$a = v_1$, caratteristica del primo mezzo]. E poiché la rifrazione dei raggi di luce non pare del tutto avversa a questo risultato [è cioè in accordo con esso, nell’ipotesi, errata, di una velocità maggiore nel mezzo più denso], ne segue che debba ritenersi altrettanto vera l’ipotesi adottata [ovvero, il “Principio” che impone che la somma dei prodotti delle lunghezze dei percorsi per le corrispondenti velocità, ciò che in seguito Maupertuis (nel 1744) definì AZIONE, debba essere la minima possibile].

5 Ulteriori testimonianze del contributo di Di Martino al “Principio di Minima Azione”

Altro accenno al contributo del Di Martino all’idea del *Principio di Minima Azione* lo troviamo nel saggio “Vita Matematica Napoletana: studio storico, biografico, bibliografico” di Federico Amodeo [12], stampato a Napoli

²¹In realtà, pur giungendo al risultato corretto (matematicamente!), la dimostrazione fornita dal Di Martino non lo è; avrebbe infatti dovuto porre nullo il differenziale seguente: $a dx + b dy = 0$. Dalla Fig. 3 si trova che:

$$x = RA = \sqrt{RS^2 + SA^2}, \quad y = AP = \sqrt{AT^2 + TP^2},$$

da cui, differenziando:

$$dx = \frac{SA dSA}{RA}, \quad dy = \frac{AT dAT}{AP}.$$

Dalla prima si ottiene: $dSA = \frac{RA}{SA} dx$, mentre dalla seconda, utilizzando il fatto che, poiché $ST = SA + AT$ è costante, si ha $dSA = -dAT$, si trova che:

$$dy = -\frac{AT}{AP} dSA = -\left(\frac{AT}{AP} \cdot \frac{RA}{SA}\right) dx.$$

Sostituendo quindi nel differenziale che deve essere posto uguale a zero si ottiene:

$$0 = a dx + b dy = a dx - b \left(\frac{AT}{AP} \cdot \frac{RA}{SA}\right) dx,$$

ovvero:

$$\frac{b}{a} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{SA/RA}{AT/AP} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2},$$

che è il risultato cercato, lo stesso ottenuto da Descartes, da Maupertuis, da Leibniz e dallo stesso Di Martino (nel Cap. IV della Sezione III del Libro I, [8]). Naturalmente, non va dimenticato che, come detto più volte, questo risultato si accorda con quanto osservato (cioè col fatto che $\theta_1 > \theta_2$) solo assumendo, ERRONEAMENTE, che $v_2 > v_1$.

nel 1905. Il §4 del cap. II (da pag. 119) è infatti dedicato ai fratelli Di Martino: Angelo (1699-1744), Niccolò (1701-1769) e per l'appunto Pietro (1707-1746). Di quest'ultimo, dopo aver descritto per sommi capi la sua opera principale, le sue *“Philosophiae Naturalis Institutionum libri tres”* [8], uscite dai torchi di Mosca a Napoli nel 1738, accenna al suo più raro opuscolo dedicato principalmente alla risoluzione della famosa disputa tra Fermat e Descartes in relazione alla rifrazione della luce. Si tratta di un breve libretto, privo di dati tipografici ma stampato a Napoli nel 1740, dal titolo: *“Petri Martini in Regio Gymnasio Neapolitano Astronomiae Professore De Luminis Refractione et Motu Brevis Lucubratio”*. In proposito aggiunge anche le seguenti notizie, che essenzialmente confermano quanto peraltro abbiamo già detto in precedenza: *«... oltre a queste opere didattiche²² Pietro di Martino ha dato alla luce due produzioni scientifiche, citate dal Riccardi solo per averle trovate registrate da altri, che al suo tempo furono ammirate moltissimo; e che quantunque ora non hanno valore scientifico sono sempre però una vera rarità bibliografica. La prima è una Memoria di 20 pagine, compreso il frontespizio, con poche figure intercalate, che ha lo scopo di esaminare la celebre controversia tra Fermat e Descartes sulle leggi della rifrazione della luce, che tanto aveva eccitati gli animi dei contemporanei e che aveva divisi i matematici in due partiti. Descartes aveva enunciata la legge della rifrazione dicendo che è costante il rapporto dei seni degli angoli d'incidenza e di rifrazione e la dimostrava nell'ipotesi che la luce avesse maggior velocità nel mezzo più denso. Fermat attaccò di falso la dimostrazione e quindi anche la legge; ma poi in seguito, richiamato da insistenti preghiere a rivedere coll'analisi le sue affermazioni, partì dall'ipotesi intuitiva²³ che in natura è legge universale quella della “minima azione”, e concluse che egli doveva ricredersi, che la legge di Cartesio era vera, ma con la diversità che i seni dei due angoli d'incidenza e di rifrazione sono direttamente proporzionali (non inversamente) alle velocità che la luce ha nei due mezzi attraverso i quali essa passa. In seguito le numerose esperienze fisiche hanno dimostrato che egli colse nel vero in tutto e per tutto; ma a quell'epoca i seguaci di Cartesio non vollero menar buona a Fermat la sua dimostrazione, negandogli l'ipotesi; poiché, essi dicevano, Iddio non ha bisogno di legarsi alla legge della minima azione nelle sue manifestazioni. Pietro di Martino si schiera fra i Cartesiani e quindi afferma e crede di dimostrare che Fermat sbaglia due volte, una prima nell'ipotesi, una seconda volta nella conclusione.»*. In una nota, l'Amodeo, descrivendo i vari §§ di questo opuscolo, ci fa sapere che il §V ha come titolo *“Verum Refractionis minimum aperitur et demonstratus”*, e, come detto anche da Nastasi e Indorato [6] (noi non siamo riusciti a consultare questo opuscolo), l'opuscolo contiene fondamentalmente quanto già esposto nei *“Monita quaedam ad Lectorem”* aggiunti all'inizio del Primo Volume delle *Institutionum* [8] di due anni prima (1738), ma con una drastica riduzione del formalismo matematico utilizzato.

²²L'Amodeo si riferisce qui sia alle *“Philosophiae Naturalis Institutionum”* [8], che alla traduzione in italiano dei primi sei libri degli *“Elementi di Euclide”* (1736), come pure alle sue *“Nuove Istituzioni di Aritmetica pratica e teorica”* (1738).

²³Trovo molto interessante e significativo il fatto che l'Amodeo definisca intuitiva l'ipotesi che in natura il Principio di Minima Azione sia una “Legge Universale”.

Riferimenti bibliografici

- [1] Stefano Ranfone, “*Sulla prima versione italiana del Principio di Minima Azione di Maupertuis e sulla sua discussione del Modello Cartesiano dei Vortici*”, (2017); URL: <https://www.academia.edu/34893321/>
- [2] P. L. M. Maupertuis, “*Saggio di cosmologia del Signore di Maupertuis, Presidente della Reale Accademia di Berlino, col di lui Discorso sulle diverse configurazioni delle Stelle*”. Tradotti, e con note illustrati dal Co: Orazio degli Arrighi Landini, Venezia, 1768.
- [3] P. L. M. Maupertuis, “*Accord de differentes Loix de la Nature auoient jusqu’ici paru incompatibles*”, Hist. Acad. Roy. Sci. [de Paris], Mem. Math. Phy., 1744 [publ. 1748].
- [4] P. L. M. Maupertuis, *Oeuvres de Maupertuis*, (vol. IV), Lione, Jean-Marie Bruyset, 1768.
- [5] P. L. M. Maupertuis, “*Essai de Cosmologie*”, s.l., 1751.
- [6] Luigi Indorato e Pietro Nastasi, “*The 1740 Resolution of the Fermat-Descartes Controversy*” , *Historia Mathematica*, **16** (1989), 137-148
- [7] Antonio Rosmini-Serbati, *Opere Edite e Inedite dell’Abate Antonio Rosmini-Serbati Roveretano* , vol. XI, Milano, Tipografia e Libreria Boniardi-Pogliani, 1845, pag. 279 e segg.
- [8] Pietro Di Martino, *Philosophiae Naturalis Institutionum libri tres*, (3 voll.), Napoli, Felix Carolus Mosca, 1738.
- [9] Pietro di Martino, *De luminis refractione et motu, brevis lucubratio*, Napoli, senza dati tipogr.
- [10] Francesco Maria Grimaldi, *Physico-Mathesis De lumine, Coloribus, et Iride...libri duo*, Bologna, Eredi di Vittorio Benazio, 1665.
- [11] Isaac Newton, *Optiks*, Londra, Sam Smith e Benjamin Walford, 1704.
- [12] Federico Amodeo, *Vita Matematica Napoletana: studio storico, biografico, bibliografico*, Napoli, F. Giannini e figli, 1905.

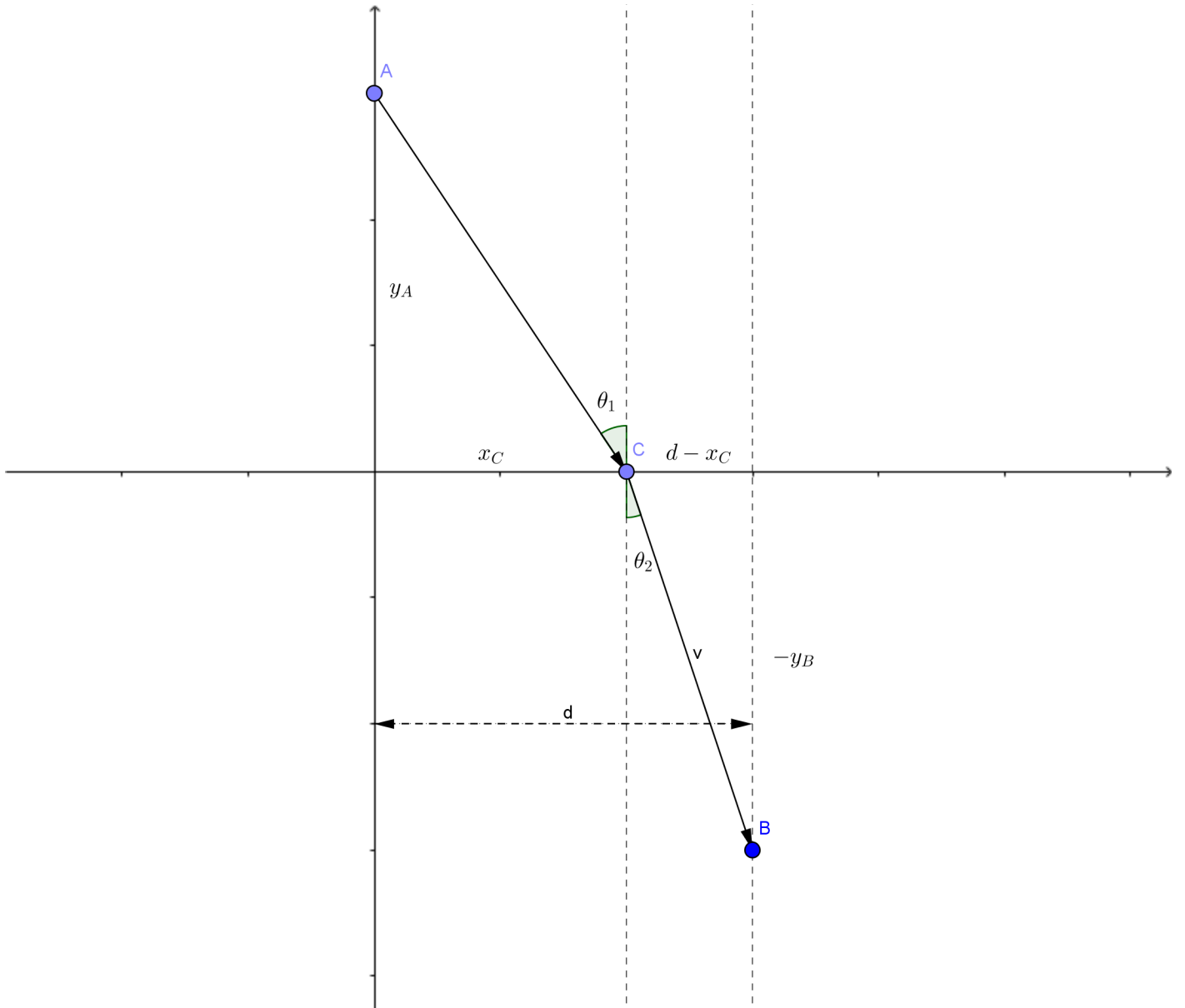


Fig. 1 [la rifrazione della luce; da [1]]

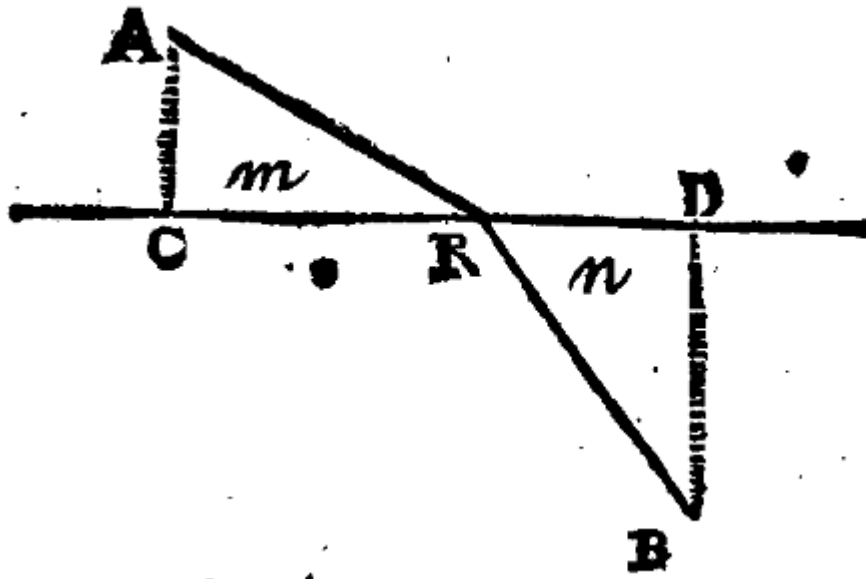


Fig. 2 [Maupertuis [4], *Oeuvres*, vol. IV, pag. 19, (1768)]

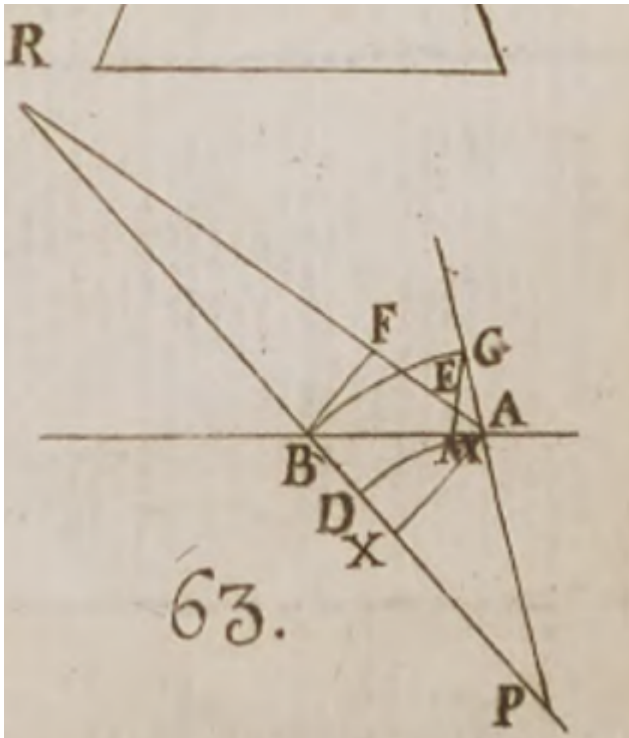


Fig. 3 [Di Martino [8], vol. I, Fig. 63, (1738)]