Su una trattazione alternativa dell'Urto Elastico del XVIII secolo

Stefano Ranfone *

Abstract

Keywords: Storia della Fisica, Meccanica, Crivelli, Urto Elastico.

In questo articolo vogliamo ricordare una trattazione dell'urto elastico del XVII-XVIII secolo, con cui si ottengono i corretti risultati senza bisogno di utilizzare il concetto di Energia Cinetica. Nella Prima parte viene rivisto il problema degli urti centrali, sia elastici che anelastici, dal punto di vista della didattica moderna. Nella seconda parte presentiamo integralmente e nell'originale versione settecentesca quanto scrisse sull'argomento Giovanni Crivelli nei suoi "Elementi di Fisica" [1], testo in cui venne anche dato un interessante Modello teorico per l'urto elastico, compatibile con i corretti risultati, e dalla cui interpretazione possiamo perfino derivare la ben nota legge di "Conservazione dell'Energia Cinetica". Nella prima delle due Appendici finali viene dimostrato, a fini essenzialmente didattici, che la massima perdita di energia si ha nel caso dell'urto completamente anelastico, mentre nella seconda si risolve un problema particolare sulla collisione elastica di N corpi proposto da Huygens e risolto da Bernoulli.

[In this paper we wish to recall an old treatment of elastic collisions as given in the XVII-XVIII centuries, capable of giving the correct results without the need of introducing the concept of kinetic energy. In the first part we recollect the standard modern approach to the problem. In the second part we present the original version of the text related to the problem of collisions as given by Giovanni Crivelli in his "Elementi di Fisica" [1], where he discusses an interesting Model for the elastic collisions, compatible with the correct results, and from whose intepretation it may be even derived the well known Conservation law for the kinetic energy. In the first of the two final Appendices we shall prove that the maximum loss of energy occurs in the case of a completely anelastic collision, while in the second one we shall solve a particular problem related to the elastic collision of N bodies, suggested by Huygens and solved by Bernoulli.]

1 Introduzione

Lo studio degli urti tra corpi materiali viene affrontato in tutti i corsi di Fisica, dai più elementari, solitamente al terzo anno di un percorso liceale, a quelli cosiddetti di "Fisica Generale", al primo anno universitario. Si tratta di un "vecchio" problema di meccanica, discusso per secoli nel contesto di quella che una volta veniva detta "Filosofia Naturale". Con la rivoluzione Scientifica del XVII secolo, conseguente alle opere di Galileo, Bacone, Cartesio, Huygens, Newton e Leibniz - solo per menzionare alcuni tra i suoi principali fautori - il problema acquisì la sua forma attuale.

Come ricorderemo nel §2, la trattazione degli urti viene affrontata nel contesto della cosiddetta *Dinamica Impulsiva*, ovvero nello studio di quelle *fasi temporali* di durata brevissima, ma nelle quali le forze coinvolte sono molto intense, solitamente non quantificabili esattamente. In tali situazioni non è solitamente possibile utilizzare le ordinarie leggi della Dinamica di Newton, cioè la ben nota formula $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$, bensì la sua analoga, valida

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

per l'appunto in ogni *fase impulsiva*: $\mathbf{I}_{imp} = \Delta\mathbf{Q}$, dove $\mathbf{I}_{imp}$ rappresenta l'*impulso* delle sole "Forze Impulsive"[1] (*e.g.*, le forze responsabili dell'urto) e $\Delta\mathbf{Q}$ è la variazione della *Quantità di Moto*[2] del sistema su cui agisce tale impulso. Considerando come sistema l'insieme costituito da tutte le parti interagenti, questo risulta essere *isolato*, $\mathbf{I}_{ext} = 0$, cosicché si ottiene $\Delta\mathbf{Q} = 0$, ovvero la ben nota legge di *Conservazione della Quantità di Moto* ($\mathbf{Q}_{iniz} = \mathbf{Q}_{fin}$) dell'intero sistema, valida quindi per ogni urto *isolato*. Questo *Principio*, peraltro, fu ipotizzato ben prima della nascita della *Fisica newtoniana*, tra gli altri dallo stesso Cartesio nei suoi *Principia Philosophiae* [2] pubblicati nel 1644, e più tardi confermato da Huygens e da Maupertuis[3].

Proprio negli stessi decenni in cui i *nuovi* filosofi naturali - i primi *fisici* in senso moderno - affrontavano il problema degli urti, si disputava sul significato del concetto di "Forza Viva"[4], concetto oggi identificabile con la cosiddetta "Energia Cinetica". Ed è proprio questa grandezza che oggi viene utilizzata - anche didatticamente - per distinguere tra due tipi di urti. Si definiscono *elastici* gli urti nei quali si conserva l'energia cinetica (ovviamente quella totale del sistema), e *anelastici* quelli in cui questa non si conserva. Caso particolare di questi ultimi è quello dei cosiddetti urti *completamente* anelastici, ovvero gli urti nei quali, dopo la loro collisione, i corpi restano uniti e si muovono insieme con una unica velocità. Nel §2 vedremo come i due casi estremi[5], urto elastico e urto completamente anelastico, vengono oggi discussi nelle scuole e nelle università, sfruttando cioè la conservazione sia della quantità di moto che dell'energia cinetica nel caso degli urti elastici, e la sola conservazione della quantità di moto nel caso di quelli completamente anelastici.

In questo articolo vogliamo essenzialmente mettere in evidenza come da una certa *"interpretazione"* - potremo dire "modello teorico" - degli urti elastici, o meglio degli urti tra "corpi elastici" (in contrapposizione con quelli dei cosiddetti "corpi *molli*", per i quali gli urti sono *anelastici*), fu possibile ottenere i risultati "corretti", senza bisogno di introdurre e utilizzare la conservazione dell'energia cinetica; anzi, possiamo dire che quest'ultima, in un certo senso, poté essere derivata - autore Leibniz - anche grazie a tale *interpretazione*.

Nei corsi standard di fisica non ci si preoccupa più del perché l'elasticità degli urti implichi anche la conservazione dell'energia cinetica, visto che, come già detto, tale conservazione viene utilizzata proprio come *definizione* di urto elastico. Riteniamo quindi che possa essere interessante evidenziare il percorso che in effetti venne intrapreso per spiegare gli urti nei primi decenni successivi all'introduzione della filosofia naturale di Newton, in particolare in Italia. A tal fine vogliamo riproporre, a titolo di esempio significativo, e arricchendola con commenti e note esplicative personali, l'esposizione *integrale* del Problema che ne fece Giovanni Crivelli nei suoi *"Elementi di Fisica"* [1], la cui Prima Edizione (in due volumi) fu stampata a Venezia nel 1731. Ma prima di ciò, pensiamo che possa essere utile ricordare come gli urti[6] vengono oggi trattati e spiegati nelle scuole, nel contesto della Fisica Classica Newtoniana.

2 Formulazione Moderna del Problema

La trattazione moderna della dinamica degli urti può essere trovata in qualsiasi libro di testo, sia a livello di scuola media superiore (*e.g.,* un liceo scientifico) che del primo anno universitario. Qui ci baseremo sulla breve esposizione che ne abbiamo dato nei nostri "*Complementi di fisica*"[6].

La legge fondamentale della Dinamica è la ben nota (*seconda*) legge di Newton, secondo la quale la risultante delle forze esterne agenti su un sistema è uguale alla variazione nell'unità di tempo della sua quantità di moto:

[1] La cosiddetta *approssimazione impulsiva* ci autorizza a trascurare, durante ogni fase impulsiva - urto - ogni eventuale forza *non*-impulsiva presente; per una più ampia discussione si veda, per esempio, i nostri *"Complementi di fisica"* [6].

[2] Ricordiamo che la *Quantità di Moto* di una particella, detta anche "momento", è definita come il prodotto della sua massa per la sua velocità; la quantità di moto di un sistema, somma delle quantità di moto di tutte le particelle che lo compongono, può esprimersi come prodotto della sua massa complessiva per la velocità del suo "centro di massa".

[3] Il padre del "Principio di minima azione", di cui ci samo occupati in un precedente articolo [3].

[4] Argomento di cui abbiamo già parlato in un articolo relativo all'introduzione della Filosofia Newtoniana in Italia, nella versione del filosofo napoletano Pietro Di Martino [4],[5].

[5] Talvolta vengono detti urti *genericamente* anelastici i casi intermedi, cioè gli urti nei quali non si conserva l'energia cinetica totale, e le particelle si muovono separamente con velocità distinte dopo la collisione.

[6] Qui ci limiteremo, in tutto l'articolo, ai soli "urti *centrali*", gli urti cioè che si sviluppano in una sola dimensione.

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}\,; \tag{1}$$

limitandoci ai sistemi a massa costante, questa equazione acquisisce la forma più familiare:

$$\mathbf{F}_{ext} = m\,\mathbf{a}\,, \tag{2}$$

dove m ed $\mathbf{a}$ sono, rispettivamnte, la massa e l'accelerazione del sistema stesso. Questa legge può essere espressa in una forma diversa associando ad ogni forza esterna il cosiddetto *"Impulso"*, che ne descrive il suo protrarsi nel tempo:

$$\mathbf{I}_F(t_1;t_2) =: \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt\,. \tag{3}$$

In questo modo la Legge della Dinamica (1) si può esprimere nella forma:

$$\mathbf{I}_{ext} = \Delta\mathbf{Q}\,, \tag{4}$$

detta anche "Teorema dell'Impulso" o *della Quantità di Moto*, secondo il quale l'Impulso totale agente su un sistema in un certo intervallo di tempo è la causa della variazione della sua quantità di moto.

Come già accennato in precedenza, nel caso di un *Sistema Isolato*, essendo $\mathbf{I}_{ext} = 0$, si ottiene il Principio di Conservazione della Quantità di Moto. La sua applicazione al problema degli urti *isolati*, *elastici* o meno, ci conferma in effetti che in tali processi la Quantità di Moto iniziale deve essere uguale a quella dello stato finale, ad urto avvenuto. Più in dettaglio, detti (M, $\mathbf{V}$) e (m, $\mathbf{v}$) le masse e le velocità *iniziali* (*i.e.*, prima dell'urto) delle *particelle* interagenti, e $\mathbf{V}'$ e $\mathbf{v}'$ le rispettive velocità *finali* (*i.e.*, dopo l'urto), tale conservazione si esprime come:

$$M\,\mathbf{V} + m\,\mathbf{v} = M\,\mathbf{V}' + m\,\mathbf{v}'\,. \tag{5}$$

Limitandoci ai soli urti *centrali*, cioè agli urti nei quali tutti i moti dei corpi coinvolti avvengono su un'unica retta, questa equazione si può scrivere più semplicemente in forma *scalare*:

$$M\,V + m\,v = M\,V' + m\,v'\,. \tag{6}$$

A questo punto possiamo distinguere i vari *tipi* di urto: quelli *elastici*, quelli *genericamente anelastici*, e quelli *completamente anelastici*, partendo da questi ultimi.

2.1 L'urto completamente anelastico

Come già detto, un urto si dice "*completamente* anelastico" se le parti interagenti (singole particelle o corpi che siano) si muovono insieme dopo l'urto, quindi con una medesima velocità: $V' = v'$. In tal caso, dall'eq.(6) si ottiene immediatamente:

$$v' \equiv V' = \frac{M\,V + m\,v}{M + m}\,. \tag{7}$$

L'impulso trasmesso tra i due corpi durante l'urto può essere determinato applicando il *Teorema dell'Impulso* (4) a ciascuno dei due corpi:

$$I_{M\to m} = \Delta Q_m = m(v' - v) = m\left(\frac{M\,V + m\,v}{M+m} - v\right) = \frac{Mm}{M+m}(V - v) \equiv \mu\,(V - v)\,, \tag{8}$$

dove $\mu = Mm/(M+m)$ è la cosiddetta *"massa ridotta"* del sistema. Chiaramente, per il "Principio di Azione e Reazione", che costituisce il *Terzo Principio della Dinamica* di Newton, l'impulso esercitato dalla massa M su m, $I_{M\to m}$, è l' opposto di quello esercitato da m su M: $I_{m\to M} = -I_{M\to m}$; infatti, troviamo che:

$$I_{m\to M} = \Delta Q_M = M(V' - V) = M\left(\frac{MV + mv}{M+m} - V\right) = \frac{Mm}{M+m}(v - V) = \mu\,(v - V)\; = -I_{M\to m}\,. \tag{9}$$

Ricordandoci che l'energia cinetica di una particella è definita come il semiprodotto della sua massa per il quadrato della sua velocità $(E_c = \frac{1}{2}mv^2\,)$, possiamo calcolarci l'energia (cinetica) *persa* nell'urto completamente anelastico utilizzando l'eq.(7):

$$\begin{aligned}\Delta E_c &= \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{(M+m)\,\frac{(MV+mv)^2}{(M+m)^2} - MV^2 - mv^2\right\} = \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\frac{Mm}{M+m}(V - v)^2 \equiv -\frac{1}{2}\,\mu\,(V - v)^2\,.\end{aligned} \tag{10}$$

2.2 L'urto elastico

Un urto viene *definito* "elastico" se nel processo si conserva l'energia cinetica complessiva del sistema, oltre naturalmente alla sua quantità di moto. In tal caso possiamo allora scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} M\,V + m\,v = M\,V' + m\,v'\,, \\ \frac{1}{2}M\,V^2 + \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}M\,V'^2 + \frac{1}{2}m\,v'^2\,. \end{array}\right. \tag{11}$$

Ponendo per convenienza $\rho = m/M$, abbiamo:

$$\left\{\begin{array}{l} V + \rho\,v = V' + \rho\,v'\,, \\ V^2 + \rho\,v^2 = V'^2 + \rho\,v'^2\,, \end{array}\right. \tag{12}$$

da cui si ottiene, dopo un po' di algebra:

$$\left\{\begin{array}{l} v' = \dfrac{2\,V + (\rho - 1)\,v}{1+\rho} = \dfrac{2MV - (M-m)\,v}{M+m}\,, \\ V' = \dfrac{V(1-\rho) + 2\,\rho\,v}{1+\rho} = \dfrac{(M-m)\,V + 2\,m\,v}{M+m}\,. \end{array}\right. \tag{13}$$

Come vedremo nel §3, queste formule sono proprio quelle ottenute da Crivelli nei suoi *Elementi di Fisica* [1], senza l'utilizzo della *Conservazione dell'Energia Cinetica*.

Spesso si considera l'urto nel sistema di riferimento solidale con la *particella "bersaglio"*, di massa m, in cui questa è inizialmente in quiete. In tal caso, ponendo $v = 0$ nell'eq.(13), si ottengono le formule solitamente date nella maggior parte dei libri di testo:

$$v' = \left(\frac{2M}{M+m} \right) V \,, \qquad V' = \left(\frac{M-m}{M+m} \right) V \,. \tag{14}$$

Situazione particolarmente interessante è quella in cui le due particelle hanno la stessa massa, $M = m$; in tal caso le eq.(14) si riducono ulteriormente al ben noto risultato:

$$v' = V \,, \qquad V' = 0 \,, \tag{15}$$

che esprime il fatto che nell'urto elastico tra due particelle identiche, queste si *scambiano* le rispettive velocità[7]: la particella *proiettile* di massa M si ferma e quella *bersaglio*, inizialmente in quiete, acquisisce la stessa velocità che aveva l'altra prima dell'urto.

2.3 L'urto parzialmente anelastico

Per esigenze di completezza, tratteremo adesso l'urto *parzialmente anelastico*, anche se sembra che tale situazione *intermedia* non venne presa in considerazione né dal Crivelli né dagli altri filosofi naturali del XVII e XVIII secolo.

Naturalmente in questo caso si conserva solo la quantità di moto del sistema, e non più la sua energia cinetica. Detta quindi $K = |\Delta E_c|/E_c(iniz) = 1 - E_c(fin)/E_c(iniz)$ la frazione di energia (cinetica) che si perde nell'urto, potremo scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} V + \rho\, v = V' + \rho\, v' \,, \\ (1-K)(V^2 + \rho\, v^2) = V'^2 + \rho\, v'^2 \,, \end{array} \right. \tag{16}$$

dalla cui risoluzione si arriva ai seguenti risultati, che generalizzano quelli dati dalle eq.(13):

$$\left\{ \begin{array}{l} v' = \frac{1}{1+\rho} \left\{ V + \rho\, v + \sqrt{(V-v)^2 - K(1+\rho)\left(v^2 + \frac{V^2}{\rho}\right)} \right\} , \\ V' = \frac{1}{1+\rho} \left\{ V + \rho \left[v - \sqrt{(V-v)^2 - K(1+\rho)\left(v^2 + \frac{V^2}{\rho}\right)} \right] \right\} , \end{array} \right. \tag{17}$$

ovvero:

$$\left\{ \begin{array}{l} v' = \mu \left\{ \dfrac{V}{m} + \dfrac{v}{M} + \dfrac{1}{m} \sqrt{(V-v)^2 - \dfrac{K}{\mu}\,(mv^2 + MV^2)} \right\} , \\ V' = \mu \left\{ \dfrac{V}{m} + \dfrac{v}{M} - \dfrac{1}{M} \sqrt{(V-v)^2 - \dfrac{K}{\mu}\,(mv^2 + MV^2)} \right\} , \end{array} \right. \tag{18}$$

dove μ è di nuovo la *massa ridotta* delle due particelle, già introdotta nel §2.1. Naturalmente, il limite per $K \to 0$ corrisponde all'urto elastico, restituendoci le formule (13).

[7]Questo fatto vale in ogni sistema di riferimento, e non solo in quello solidale con la particella di massa m, come è facile dedurre dalle eq.(13), ponendo $\rho = 1$.

Nel §4 (*Appendice 1*), esclusivamente a fini didattici, dimostreremo l'ovvio risultato secondo il quale la massima perdita di energia (cinetica) corrisponde al caso dell'urto *completamente anelastico*, per il quale tale perdita è data dall'eq.(10).

3 Trattazione dell'urto ad opera del "Crivelli"

A questo punto, dopo aver ricordato qual'è la usuale trattazione *moderna* del problema degli urti, possiamo presentare, *ad litteram*, l'esposizione originale che ne dette Giovanni Crivelli nei suoi "Elementi di Fisica" [1], dalla quale vedremo come fu possibile ottenere i risultati precedenti relativi al caso dell'urto elastico, eqs.(13), senza bisogno di utilizzare il *Principio di conservazione dell'Energia Cinetica*, ma servendosi di una sorta di *Modello Teorico*. Per dar modo di apprezzare lo stile dell'autore non ne modificheremo né la forma né l'ortografia, anche se talvolta piuttosto desueta ad un occhio moderno. Il testo originale sarà integralmente riprodotto, in carattere *corsivo*; quello che segue in §3.1 è quasi interamente il cap. XVII del Libro Secondo[8] (della Parte Prima), dalla pag. 109 alla pagina 125 del Primo Volume dell'opera [1].

3.1 Della comunicazione del Moto, dove si stabiliscono i Principj della dinamica. Cap. XVI.

Una delle più importanti cognizioni nella Filosofia naturale è quella della comunicazione de' moti. Come l'Universo è tutto pieno di moto, così nissuna cosa ci è più familiare quanto il veder corpi mossi da altri corpi. Ma come quello, ch'è in quiete si pone in moto da un corpo, ch'è in moto, così quello, ch'è in moto o si riduce alla quiete da quello, ch'è in quiete, o si riduce ad un più lento moto. Le leggi colle quali ciò si fa, lungo tempo giacquero ignote, né ci è restata memoria alcuna degli antichi che ce le manifestasse, se pure ve ne fu alcuno, che le abbia conosciute.

Il primo a cercarle fu il Cartesio[9]*, ma non a ritrovarle. Il primo che diede le vere leggi de' corpi duri fu Giovanni Wallis*[10] *Professor Saviliano, e le registrò nelle transazioni Inglesi, dove ancora spiegò la vera causa della riflessione de' corpi. Non molto dopo Cristoforo Wrenio*[11]*, e Cristiano Ugenio*[12] *presentarono separatamente le leggi del moto de'corpi perfettamente elastici*[13] *all'Accademia di Londra determinate nella stessa maniera, sebbene uno non sapeva dell'altro. Dopo di che il Newton, il Mariotte*[14]*, il Carrè, ed altri acutissimi Filosofi le stesse leggi in diversa maniera esposero, e con una quantità grande di esperimenti le confermarono.*

Noi l'esporremo in una delle maniere, che crediamo più facili, e come in natura possiamo distinguere due sorti di corpi; altri che compressi, ed ammaccati conservano le loro ammaccature, e chiamansi "molli"; altri che dopo la compressione al loro stato primiero ritornano, e chiamansi "elastici", così le leggi per amendue tali corpi

[8] Per un errore tipografico, il capitolo è stato numerato nel testo "XVI" anziché "XVII"; errore poi emendato nell'*Indice* riportato alla fine del volume.

[9] René Des-Cartes (La Haye, 1596 - Stoccolma, 1650) è stato un filosofo e matematico francese, uno dei maggiori fautori della *Rivoluzione Scientifica* del XVII secolo. Espose la sua *Fisica*, in cui considerò anche il problema dell'urto tra vari corpi, nei suoi *"Principia Philosophiae"* [2].

[10] John Wallis (Ashford, 1616 - Oxford, 1703) è stato un presbitero e matematico inglese.

[11] Christopher Wren (East Knoyle, 1632 - Londra, 1723) è stato un architetto, fisico e matematico inglese, celebre soprattutto per il suo ruolo capitale nella ricostruzione di Londra dopo il grande incendio del 1666.

[12] Christiaan Huygens (L'Aia, 1629 - L'Aia, 1695) è stato un matematico, astronomo e fisico olandese, fra i protagonisti della *Rivoluzione Scientifica.*

[13] Nel XVII e XVIII secolo, invece di definire l'urto *elastico*, si preferiva definire l'urto *tra corpi elastici*, ovvero "duri", definiti, come a breve preciserà nel testo lo stesso Crivelli, come quei corpi che, anche se temporaneamente *modificati* durante l'interazione con gli altri corpi, alla fine tornano nel loro stato iniziale; in contrapposizione a questi, saranno definiti i corpi *molli*, che dopo l'urto mantengono le modificazioni eventualmente subite durante il processo; per questi ultimi, non essendoci l'effetto dovuto all'*elasticità*, sono pertanto ipotizzabili gli urti *completamente anelastici*, caratterizzati da una unica velocità nello stato finale per tutte le parti coinvolte.

[14] Edme Mariotte (Digione, 1620 - Parigi, 1684) è stato un fisico francese.

stabiliremo. E perché l'urto si può fare in due forme o "direttamente", o "indirettamente"[15]*, così per l'uno e per l'altro caso saranno da noi esposte.*

Urto diretto si dice quello, che si fa, quando il centro della percossa del corpo, che urta si muove per una linea perpendicolare alla superficie del corpo urtato.

"Urto obliquo", quando la linea del centro della percossa è obliqua alla superficie del corpo urtato.

"Centro della percossa" è il punto, in cui sta la massima forza dell'urto. Tale centro è lo stesso, che quello della gravità[16]*, quando i corpi si muovono liberamente, ed è lo stesso che quello della oscillazione, quando si muovono come i pendoli.*

Leggi della comunicazione del moto diretto de' corpi perfettamente molli.

"Corpo perfettamente molle" si dice quello, che quando è stato compresso, ed ammaccato resta esattamente nella sua ammaccatura senza alcuna energia, o efficacia di restituirsi; come prossimamente è l'argilla, e il sevo[17]*.*

La "quantità di moto" è il prodotto della massa, che si muove, e dalla velocità, con cui si muove; laonde se la massa si dice M*, e la velocità* V*, si esprimerà per* MV*, come abbiamo notato nella Definizione*[18] *12 del Cap. I. E perciò se la quantità del moto è data, in quella guisa che dividendola per la velocità* V*, si avrà per quoto la massa* M*; così dividendola per la massa* M *si avrà la velocità* V*.*

Per determinare le leggi de' moti ne' corpi molli avanti di ogni ragionamento Metafisico, e colla sola sperienza io mi metto a considerare come vanno i loro moti ne' casi più semplici. Dove osservo in tre maniere, e non più potersi fare un urto di due corpi[19]*. La prima, quando amendue i corpi si vengono incontro, e si percuotono l'uno coll'altro; la seconda quando l'uno sta in quiete, e l'altro lo viene a percuotere; la terza quando amendue si muovono dalla medesima parte, e il più veloce sovragiunge, e percuote il più lento.*

Sperienza prima per il primo caso.

Se due sfere di argilla molle M*, ed* m *amendue di massa* 1*; colle velocità* MP*,* mP *eguali ad* 1 *si vengono incontro nel punto* P*, dopo l'urto restano senza moto*[20] *in* P*.*

Sperienza seconda.

Se una sfera di argilla molle M *di massa* 2 *si muove colla velocità* MP *eguale a* 1*; e gli viene incontro la sfera* m *di grandezza* 1 *colla velocità* 2 *dopo l'urto fatto in* P *restano amendue senza moto*[21]*.*

Sperienza terza.

Se una sfera di argilla molle M *di massa* 1 *si muove colla velocità* MP *eguale a* 2*, e gli viene incontro la sfera* m *di grandezza* 1 *colla velocità* mP *eguale a* 1*; dopo l'urto fatto in* P *la più veloce trasporta la più lenta, e vanno*

[15] L'urto "diretto" è un urto *centrale*, che quindi avviene in una sola dimensione, e noi ci limiteremo solo a questo caso. Anche nell'esposizione del Crivelli ometteremo il secondo tipo, che lui definisce *obliquo* o "indiretto", noi diremmo *urto non-centrale*, e che avviene in due dimensioni (ovviamente nel caso qui considerato dell'urto tra due soli corpi o particelle).

[16] In realtà è il suo *Centro di Massa*.

[17] Grasso di origine animale o vegetale, usato soprattutto per la fabbricazione di candele, sapone, *etc.*

[18] Definizione che viene data a pag. 66 del Tomo I, e che qui riportiamo: *"I gradi del moto, per cui un moto si paragona all'altro, si dicono la quantità del moto, ovvero il momento. Essi prendonsi da due diversi riguardi, e per la mole, che dee muoversi, e per la celerità, con cui dee muoversi. Se quando una mole* 1 *percorre spazio* 1 *si dice aver moto* 1*, una mole* 2*, che nello stesso tempo percorre lo spazio stesso, averà moto* 2*. Se restando la stessa mole si duplica lo spazio, parimenti averà moto* 2*".*

[19] Come già avevamo sottolineato in un precedente articolo [4], la trattazione dei problemi di Meccanica nel XVII e XVIII secolo risentiva spesso del non utilizzo del *Calcolo Vettoriale*. Anche in questo caso, nel linguaggio moderno, cioè con l'impiego dei vettori, non ci sarebbe stato alcun bisogno di discutere separatamente i tre casi presentati dal Crivelli.

[20] Infatti, trattandosi di un urto *completamente anelastico*, essendo in questo caso nulla la quantità di moto iniziale del sistema: $Q = MV + mv = MV + m(-V) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, dalla sua conservazione, ovvero in virtù dell'eq.(7), si ottiene immediatamente che $v' \equiv V' = 0$.

[21] Come nel caso precedente, ciò è conseguenza del fatto che risulta nulla la quantità di moto iniziale totale: $Q = MV + mv = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$, che deve conservarsi.

amendue colla velocità[22] *PQ eguale a $\frac{1}{2}$.*

Sperienza per il secondo.

Se una sfera di argilla molle M di massa 1 si muove colla velocità MP eguale a 1, contro una sfera di grandezza 1, e posta in quiete in P, dopo l'urto amendue unite si muovono[23] *verso Q colla velocità PQ eguale a $\frac{1}{2}$.*

Sperienza per il terzo.

Se una sfera di Argilla molle M di massa 1 si muove colla velocità MP eguale a 2, ed un altra sfera molle m ad essa eguale si muove dalla medesima parte colla velocità mP eguale a 1 , dopo l'urto fatto in P, si muovono amendue unite verso Q colla velocità eguale[24] *a $\frac{3}{2}$.*

Dalle tre sperienze del primo caso[25] *io conosco, che le quantità di moto eguali e contrarie si elidono, e si distruggono. E dalle sperienze del secondo e terzo caso io trovo, che non si distrugge alcuna parte di moto*[26]*; ma quanto moto vi era avanti l'urto, tanto ve n'è dopo l'urto.*

Imperocché se si prendono i moti della prima e seconda sfera nelle due prime sperienze del primo caso, si trovano in questa e in quella esser[27] *1, ma dopo l'urto sono zero essendosi l'uno coll'altro distrutti; perché contrarj. Nella terza sperienza il moto della prima sfera è 2, il moto della seconda è 1 ; e in conseguenza il moto totale*[28] *3. Dopo l'urto il moto totale è 1 ; distruggendosi le quantità eguali contrarie; e restando solo l'eccesso con cui il moto maggiore supera il minore.*

Ma nella sperienza del secondo caso io trovo essere il moto totale avanti l'urto 1 ; e dopo l'urto parimenti 1 ; e perciò niente esservi di distrutto; perché niente vi è di contrario. Così parimenti nella sperienza del terzo caso la quantità del moto avanti l'urto è 3 ; e dopo l'urto parimenti 3 .

Tali leggi della Natura osservate in tali sperienze servono di regola a costruire i canoni generali della comunicazione del moto per i corpi molli.

Problema Primo.
Dati due Corpi perfettamente molli, che si vengono ad urtare l'uno contro l'altro direttamente[29]**, e data la loro celerità avanti l'urto, determinar la loro celerità dopo l'urto.**

Sia un corpo, che urta M, e la velocità con cui urta V; e sia l'altro m, e la sua velocità v. Sarà la quantità del moto nel primo MV, e nel secondo[30] *mv. Nel punto dell'urto i due corpi ch'erano separati diventando uniti formeranno un corpo solo*[31]*, in cui distruggendosi una parte del moto dal moto contrario, e non restando altro che la differenza de'moti, sarà il moto totale $MV - mv$. Dividendo tal moto per la massa totale $M + m$ si avrà la celerità ricercata dopo l'urto ad amendue i corpi comune*[32]*, che sarà $\frac{MV - m\,v}{M+m}$.*

[22] Questa volta la quantità di moto del sistema, costante, non è nulla: $Q = MV + mv = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 1$, per cui dalla (7) si ottiene in effetti: $v' \equiv V' = Q/(M + m) = 1/(1 + 1) = 1/2$.

[23] Infatti, ponendo $v = 0$ nell'eq.(7), si ottiene: $v' \equiv V' = MV/(M + m) = 1 \cdot 1/(1 + 1) = 1/2$; essendo positiva, significa che questa *comune* velocità è nella stessa direzione della velocità iniziale della massa M, ovvero da M verso m.

[24] Essendo la quantità di moto uguale a: $Q = MV + mv = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$, la (7) porta al risultato dato dal Crivelli: $v' = V' = Q/(M + m) = 3/(1 + 1) = 3/2$.

[25] Desideriamo sottolineare, ancora una volta, l'evidente assenza di economia degli spazi nelle esposizioni settecentesche dei problemi di fisica, a causa di un limitato utilizzo di strumenti algebrici e vettoriali ! Quanto visto in questi tre *sottoparagrafi* potrebbe infatti essere espresso dalle sole eq.(7).

[26] Per *moto* si intende qui la "quantità di moto" Q.

[27] Come spiegato in dettaglio nelle *Note* precedenti.

[28] Questa affermazione è evidentemente errata, poiché 3 sarebbe la *somma dei moduli* delle quantità di moto delle due sfere; essendo Q una grandezza vettoriale, poiché nel caso considerato $v < 0$ (visto che la sfera m si muove con velocità opposta a quella di M), la "somma" delle due quantità di moto ha modulo dato dalla *differenza* dei rispettivi moduli: $Q = MV + m\,v \Rightarrow |Q| = |\,MV + m\,v\,| = M\,|V| - m\,|v|$, che in effetti dà il corretto risultato: $Q = 2 - 1 = 1$ uguale, come deve essere, alla quantità di moto finale.

[29] *i.e.*, "centralmente".

[30] Noi diremmo, *più correttamente*, $-m\,v$.

[31] Come si è visto, è questa l'attuale definizione di urto *completamente anelastico*.

[32] Questa esposizione del nostro autore coincide, essenzialmente, con quanto detto nel §2.1.

Problema Secondo.
Dati due Corpi perfettamente molli, l'uno de' quali urta direttamente nell'altro posto in quiete, determinar la loro celerità dopo l'urto.

Sia il corpo che urta M*, e la sua velocità* V*; e sia l'urtato* m*, e la sua velocità zero*[33]*. La quantità del moto nel primo sarà* MV *; e nel secondo zero. Nel punto dell'urto i due corpi, ch'erano separati diventando uniti formeranno un corpo solo, in cui, non essendovi moti contrarj, che si distruggano, resterà la stessa quantità di moto di prima, che sarà* MV *, la quale divisa per la massa totale* $M+m$ *darà la celerità ricercata comune ad amendue i corpi dopo l'urto, che sarà* $\frac{MV}{M+m}$ *.*

Problema Terzo.
Dati due Corpi perfettamente molli, l'uno de' quali urta direttamente nell'altro, che si muove verso la medesima parte, determinar la loro celerità dopo l'urto.

Sia il corpo, che urta M*, e la sua velocità* V*, e sia l'urtato* m*, e la sua velocità* v*. La quantità del moto nel primo sarà* MV *, e nel secondo* mv *. Nel punto dell'urto i due corpi, ch'erano separati diventando uniti formeranno un corpo solo, in cui, non essendovi moti contrarj, che si distruggano, resterà la stessa quantità di moto di prima, che sarà* $MV+mv$ *la quale divisa per la massa totale* $M+m$ *darà la celerità ricercata comune ad amendue i corpi dopo l'urto, che sarà* $\frac{MV+mv}{M+m}$ *.*

Annotazione.[34]

L'ultimo canone può servire per tutti e tre i casi osservando di far negativo mv *, quando le direzioni sono contrarie, e zero quando il corpo urtato è in quiete; ed in tal maniera secondo tutte le circostanza possibili saranno determinate le celerità dopo l'urto de' corpi molli.*

Esempio per lo primo caso.

Sia la sfera M *2, e la velocità* V *2 ; e gli venga incontro la sfera* m *1, e la velocità* v *2 . Dopo l'urto fatto in* P *la loro celerità comune si troverà*[35] $\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}$ *; e con tale celerità moveranno insieme verso*[36] Q *.*

Se dal canone nasce un numero negativo, seguita, che il corpo che urta è risospinto, e trasportato indietro dalla forza maggiore del corpo urtato[37]*.*

Esempio per lo secondo caso.

Sia la sfera M *2, e la velocità* V *2 ; e la sfera urtata* m *1, e la velocità* v *zero. Dopo l'urto fatto in* P *andranno insieme in* Q *colla velocità*[38] $\frac{4}{3}$ *.*

Esempio per lo terzo caso.

Sia la sfera M *2 e la velocità* V *2 ; e la sfera urtata* m *1, e la velocità* v *1 . Dopo l'urto fatto in* P *andranno insieme in* Q *colla velocità*[39] $\frac{4+1}{3}=\frac{5}{3}$ *.*

Annotazione.

Quando due corpi molli si muovono l'uno contro l'altro con moti eguali[40]*, è necessario, che si fermino. Perché se non si fermano, o è necessario che prevalga una delle due direzioni, e secondo quella si muovano, o che ritornino*

[33] Si tratta semplicemente del caso *particolare* in cui $v=0$.

[34] In questa *Annotazione*, l'autore si rende conto che avrebbe potuto utilizzare il "Problema Terzo" - considerandolo come *caso generale* - per trattare i primi due.

[35] Applicando di nuovo il risultato generale dato in eq.(7) si ottiene, infatti: $v' \equiv V' = (MV+mv)/(M+m) = (2\cdot 2+1\cdot(-2))/(2+1) = 2/3$.

[36] PQ è ovviamente la direzione della velocità iniziale V di M.

[37] Affinché ciò avvenga, è sufficiente che sia *negativa* la quantità di moto (totale) iniziale.

[38] Sempre dalla (7), si ha infatti: $v' \equiv V' = (MV+mv)/(M+m) = (2\cdot 2+1\cdot 0)/(2+1) = 4/3$.

[39] Questa volta: $v' \equiv V' = (MV+mv)/(M+m) = (2\cdot 2+1\cdot 1)/(2+1) = 5/3$.

[40] E quindi con quantità di moto uguali ed opposte, cosicché quella totale risulta essere nulla.

amendue indietro. Non il primo, perché l'eguale vincerebbe l'eguale. Non il secondo, perché un corpo non può muoversi per una direzione nuova, se non vi è una nuova causa, che lo determini[41]*.*

"È chiaro[42] *(dice il Sig. Fontanelle*[43]*) che la sola Metafisica, e senza dipendere dalla sperienza, che due forze eguali essendo opposte s'impediscono assolutamente l'azione l'una dell'altra, e si distruggono scambievolmente inquanto ch'elle sono forze agenti, ch'elle non si distruggono in alcun modo se non sono in alcun modo opposte, e che se due forze sono ineguali, ed opposte, non resta del loro contrasto che l'eccesso della più grande sulla più piccola."*

Tale comunicazione di moto non si fa tutta in un tempo; perché, come osserva ancora il Leibnizio, la Natura non opera per salto, ed ascende alle quantità finite sempre per le sue infinitesime. Nel primo minimo tempo, che un corpo urta un altro gli comunica un grado del suo moto, e gli dà una velocità conveniente alla sua azione, ed alla resistenza di quello ch'è percosso. E perché intanto egli perde moto, ed il corpo percosso ne acquista, nel secondo tempo gli comunica un'altro grado minore del primo, nel terzo un'altro grado ancora minore, e così seguitando per gradi continuamente decrescenti; finochè con tanta velocità gli fugga davanti il corpo percosso con quanta egli lo segue, nel qual tempo l'ultimo grado di comunicazione diventa zero[44]*.*

Corollario

Se la celerità del corpo urtato m *acquistata dopo l'urto si moltiplica per la sua massa* m *si avrà la sua quantità di moto dopo l'urto, che sarà* $\frac{M\,V\,m + m\,m\,v}{M+m}$ *. Sottraendo da questa il moto, ch'egli aveva avanti l'urto, si avrà la quantità del moto comunicato*[45]*, che sarà* $\frac{M\,V\,m + m\,m\,v}{M+m} - m\,v = \frac{M\,V\,m - M\,m\,v}{M+m}$ *. Il qual canone serve per tutt'i casi cangiando segno al termine* $M m\,v$ *alloraché le direzioni sono contrarie*[46]*, e cancellando lo stesso termine, quando il corpo percosso era in quiete avanti della percossa*[47]*.*

Leggi della comunicazione del moto nell'urto diretto de' Corpi perfettamente elastici.

Corpo perfettamente elastico si dice quello, che dopo di essere stato compresso nella percossa si restituisce esattamente alla sua primitiva figura. Tal è prossimamente una sfera di cristallo, di avorio, e di acciajo.

Date le leggi de' molli, non è difficile il conoscere quelle degli elastici. Per determinarle io considero[48]*, che un corpo elastico intanto agisce, in quanto patisce, e la misura della sua azione è la sua passione. Un'arco per esempio intanto vibra la saetta, in quanto è stato piegato, e la misura della sua vibrazione dipende dalla sua compressione. La compressione, che patisce un corpo elastico non avendo altra causa, che la quantità del moto, che in esso s'imprime*[49]*, ed essendo gli effetti sempre proporzionali alle loro cause*[50]*, seguita che la quantità del moto comunicata sarà la misura della compressione del corpo elastico, e in conseguenza della sua azione. Quando una sfera di avorio percuote direttamente un'altra sfera di avorio, con quella quantità di moto, che le comunica, con quella la comprime; e perché l'azion'è uguale alla reazione, per questo colla stessa misura resta compressa. Se i corpi fossero molli, le celerità dopo l'urto andrebbono conforme i canoni de' molli. Ma perché sono elastici si restituiscono alla loro primitiva figura con quella forza, con cui sono stati compressi; onde nasce una nuova azione, dalla quale nascono le leggi differenti*[51]*.*

[41] Diretta conseguenza delle *Leggi della Dinamica di Newton*.

[42] Nel testo, l'autore inserisce anche il testo originale francese, seguito dalla traduzione italiana.

[43] Nelle *"Mem. dell'Accad."*, 1720. Bernard le Bovier de Fontenelle (Rouen, 1657 - Parigi, 1757), si distinse come ottimo prosatore in varie opere di carattere filosofico-letterario. Fu autore di uno dei primi *racconti* di divulgazione scientifica - forse definibile *di fantascienza* - le *"Entretiens sur la Pluralité des Mondes"*, e in quanto cartesiano difese la "Teoria dei vortici".

[44] Interessante *tentativo* di dare un "modello" teorico per l'urto anelastico.

[45] Questa quantità, che il Crivelli chiama "quantità del moto comunicato", non è altro che l'impulso trasmesso tra i due corpi durante l'urto, che noi abbiamo ottenuto in eq.(8).

[46] Come già ripetutamente sottolineato, ciò non è necessario, considerando la velocità v come una quantità vettoriale.

[47] Mentre è invece sufficiente porre $v = 0$ nella formula ottenuta, coincidente con la nostra eq.(8).

[48] Qui l'autore presenta il suo "Modello Teorico" per l'*Urto Elastico*, modello che riprodurrà gli stessi risultati ottenuti nel §2.2 con l'utilizzo della Legge di conservazione dell'Energia Cinetica, dati dalle eq.(13).

[49] Noi oggi preferiremmo dire che la causa è "l'impulso" che ha agito su di esso.

[50] Uno dei *Princìpi* fondamentali dell'intera Filosofia Naturale.

[51] In queste poche parole è contenuta l'intera essenza del modello, secondo il quale l'elasticità dei corpi (duri) causa una *"doppia"*

Problema universale.
Dati due Corpi perfettamente elastici, e date le loro celerità, avanti l'urto, determinar per qualunque caso le loro celerità dopo l'urto.

Sia il corpo, che urta M*, e la sua velocità* V*, il corpo urtato* m*, e la sua velocità* v*. Se fossero molli la quantità del moto comunicata dal primo al secondo sarebbe*[52] $\frac{M\,V\,m - M\,m\,v}{M+m}$ *. E perché con questa stessa misura fassi la compressione di amendue nella percossa; si restituirà dunque l'elaterio*[53] *del primo con questa stessa misura, ed in conseguenza comunicherà al trettanto moto al secondo, e perciò il moto che riceve il corpo secondo sarà*[54] $\frac{2M\,V\,m - 2M\,m\,v}{M+m}$ *. Ma prima dell'urto aveva egli la quantità di moto* $m\,v$ *. Dunque il suo moto totale sarà dopo l'urto* $\frac{2M\,V\,m - 2M\,m\,v}{M+m} + m\,v = \frac{2M\,V\,m - M\,m\,v + m\,m\,v}{M+m}$ *. Dividendo tal moto per la massa* m *si avrà la celerità ricercata del corpo percosso* m *dopo l'urto*[55] $= \frac{2M\,V - M\,v + m\,v}{M+m}$.

Per conoscere poi la celerità del corpo M *io considero, che la quantità del suo moto perduto per l'urto è* $\frac{M\,V\,m - M\,m\,v}{M+m}$ *. Ed altrettanta ne distrugge l'elaterio del corpo* m *. Dunque il suo moto perduto è*[56] $\frac{2M\,V\,m - 2M\,m\,v}{M+m}$ *. Il suo moto prima dell'urto era* $M\,V$ *. Dunque il moto, che dopo l'urto gli resta, è* $M\,V - \frac{2M\,V\,m - 2M\,m\,v}{M+m} = \frac{M\,M\,V + 2M\,m\,v - M\,V\,m}{M+m}$ *. Dividendo tal moto per la massa* M *si avrà la sua celerità dopo l'urto*[57] $= \frac{M\,V + 2m\,v - m\,V}{M+m}$.

Tali canoni servono per tutti e tre i casi cangiando segno ai termini, dove si contiene la lettera v *, quando i corpi si incontrano, e cancellando gli stessi termini, quando il corpo percosso stava in quiete*[58].

Esempio per lo primo caso.

Sia la sfera M *2, e la sua velocità* 1 *; e le venga incontro la sfera,* m *1, colla velocità* 2 *. Dopo l'urto fatto in P la celerità della sfera* M *si troverà per il canone essere*[59] -1 *, la quale sendo negativa, mentre prima era positiva, significa, che la sfera M ritornerà indietro colla velocità 1 in Q. La velocità della sfera m si trova per lo canone essere*[60] 2 *, la quale sendo positiva, mentre prima era negativa, significa, che la sfera m ritornerà indietro*[61] *colla velocità* 2 *in*[62] *R.*

Esempio per lo secondo caso.

Sia la sfera M *2, e la sua velocità* 1 *; la sfera,* m *1, e la sua velocità zero. Dopo l'urto fatto in P, la celerità della prima sarà*[63] $\frac{1}{3}$ *; e della seconda*[64] $\frac{4}{3}$ *. E perciò intanto che la prima andrà in Q, la seconda andrà*[65] *in R.*

azione dell'*Impulso* scambiato tra i due corpi, rispetto al caso dell'urto (anelastico) tra corpi *molli*.

[52]Come l'autore ha dimostrato nel *Corollario* precedente, ed in accordo col nostro risultato dato in eq.(8).

[53]Dal *Dizionario Etimologico Online*: elaterio = *lat.* ELATERIUM dal *gr.* ELATER *che stimola, che distende* e questo da ELAO *stimolare, spingere* (v. *Elastico*). Forza di distensione dei corpi, proprietà de' corpi elastici; ...

[54]Qui viene spiegato ancor più in dettaglio il perché si debba assumere che l'impulso trasmesso tra i due corpi nel caso di un urto elastico sia esattamente il doppio di quello trasmesso nel caso anelastico, ovvero nel caso di urto tra corpi *molli*.

[55]Riproducendo così esattamente il risultato dato dalla prima delle eq.(13), ottenuto imponendo, come ripetutamente già detto, la conservazione dell'energia cinetica durante l'urto.

[56]Ovviamente è lo stesso acquistato dal corpo urtato m .

[57]Questa volta, riproducendo correttamente la seconda delle eq.(13).

[58]Una traccia di quello che poi diventerà il moderno "metodo vettoriale"; se i corpi si muovono inizialmente l'uno incontro all'altro è sufficiente quindi sostituire v con $-v$ nei risultati ottenuti, cioè nelle eq.(13); se invece la particella *bersaglio* m è inizialmente in quiete, occorre porre $v = 0$ in queste stesse equazioni.

[59]Infatti, applicando la seconda delle eq.(13, con $M = 2, V = 1, m = 1, v = -2$, troviamo: $V' = [(M-m)V + 2mv]/(M+m) = [(2-1)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-2)]/(2+1) = -1$.

[60]Applicando questa volta la seconda delle eq.(13) otteniamo in effetti: $v' = [2MV - (M-m)v]/(M+m) = [2\cdot 2\cdot 1 - (2-1)\cdot(-2)]/(2+1) = 2$.

[61]Cioè si muoverà nello stesso verso nel quale si muoveva la sfera di massa M prima dell'urto, che nel nostro caso è stato assunto come *verso "positivo"*.

[62]R essendo il punto dal quale proveniva la sfera m .

[63]Applicando di nuovo la seconda delle eq.(13), ma con $M = 2, V = 1, m = 1, v = 0$, troviamo: $V' = [(M-m)V + 2mv]/(M+m) = [(2-1)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 0]/(2+1) = \frac{1}{3}$.

[64]Dalla prima delle eq.(13) possimo infatti scrivere: $v' = [2MV - (M-m)v]/(M+m) = [2\cdot 2\cdot 1 - (2-1)\cdot 0]/(2+1) = \frac{4}{3}$.

[65]Essendo le velocità di M e di m entrambe positive, significa che le due sfere proseguiranno dopo l'urto nello stesso verso (*positivo*) che caratterizzava la velocità iniziale V della sfera M.

Esempio per lo terzo caso.

Sia la sfera M 1, e la sua velocità 6, la sfera, m 8, e la sua velocità 1. Dopo l'urto fatto in P la celerità della prima sarà[66] $-\frac{26}{9}$ *, colla quale ritornerà indietro in Q, e la celerità dell'altra sarà*[67] $\frac{12}{9}$ *, colla quale avanzerà in R.*

Le quali cose sono tutte conformi alla sperienza con quei difetti però, che dipendono dalla imperfezione degli elaterj, che non sono mai perfetti ne' corpi, che adoperiamo per fare gli esperimenti[68].

Corollarj.[69]

1. Se una sfera elastica M percuote un'altra sfera elastica m di massa eguale, e posta in quiete in P, la prima dopo l'urto resta senza moto in P, e la seconda si muove colla celerità della prima[70] *in Q. Dalle quali cose segue, che se una sfera M percuote un'altra m, cui sta congiunta una terza n supposte tutte eguali, M comunicherà tutto il suo moto a m; ed m a n; e perciò non si moverà, che n, andando in Q colla celerità di M. Per questa stessa ragione se due percuotono in tre, le due ultime dele tre si muovono come un corpo solo; e se tre percuotono in quattro, si muovono le tre ultime, ed il numero delle mosse è sempre uguale al numero delle moventi.*

2. Se due sfere elastiche eguali s'incontrano direttamente con celerità eguali, ritorneranno amendue indietro colle stesse celerità.

3. Se due sfere elastiche eguali con ineguali celerità si vengono incontro, dopo l'urto ritorneranno colle celerità cambiate[71].

4. Se una sfera elastica più veloce sovragiunge un'altra sfera elastica eguale meno veloce, dopo l'urto avanzeranno colle celerità cambiate[72].

5. Se s'incontrano due sfere, le cui masse sono in ragione reciproca delle celerità, dopo l'urto ritorneranno indietro colle medesime celerità[73].

6. Se una sfera finita M urta in una sfera infinita m posta in quiete, il canone $\frac{MV+2mv-mV}{M+m}$ *diventa*[74] $-V$. *Imperocché nel numeratore svanisce prima il termine $2mv$; perché v si suppone zero; indi il termine MV per riguardo a $-mV$, ch'è infinito; e nel denominatore svanisce M per riguardo a m ed in conseguenza diventa*[75]

---

[66] Difatti, dalla seconda delle eq.(13), con $M = 1$, $V = 6$, $m = 8$, $v = 1$, troviamo: $V' = [(M-m)V + 2mv]/(M+m) = [(1-8)\cdot 6 + 2\cdot 8\cdot 1]/(1+8) = (-42+16)/9 = -\frac{26}{9}$.

[67] Dalla prima delle eq.(13) si ha: $v' = [2MV - (M-m)v]/(M+m) = [2\cdot 1\cdot 6 - (1-8)\cdot 1]/(1+8) = (12+7)/9 = \frac{19}{9}$.

[68] L'autore precisa che i risultati *teorici* ottenuti risultano essere in accordo coi risultati sperimentali, tenendo conto dell'incertezza dovuta alla non perfetta elasticità degli urti, ovvero dei corpi, utilizzati. In questa frase possiamo cogliere l'essenza del *Metodo Sperimentale* che caratterizzò la "Nuova Filosofia Naturale" (*Fisica*), distinguendola dalla precedente filosofia *peripatetica* basata sugli scritti di Aristotele.

[69] In questi *Corollari* l'autore fornisce ulteriori esempi notevoli e casi particolari, alcuni dei quali sono già stati considerati nel §2.

[70] Si veda l'eq.(15) del §2.2.

[71] Come già detto nella nota 7, nel caso di masse uguali, i due corpi si *scambiano* la velocità: $V' = v$ e $v' = V$.

[72] ovvero *scambiate*.

[73] Infatti, se $\rho = m/M = -V/v$, col segno *meno* dovuto al fatto che la sfera di massa m, andando *incontro* alla massa M, ha inizialmente una velocità v negativa, dalle eq.(13) si ottiene:

$$\begin{cases} v' = \frac{2V+(\rho-1)v}{1+\rho} = V\,\frac{2+(\rho-1)/(-\rho)}{1+\rho} = \frac{V}{\rho} = -v\,, \\ V' = \frac{V(1-\rho)+2\rho v}{1+\rho} = v\,\frac{(-\rho)(1-\rho)+2\rho}{1+\rho} = \rho\, v = -V\,, \end{cases}$$

confermando quanto detto dal Crivelli.

[74] Avere una sfera finita M che urta una sfera *infinita* m in quiete ($v = 0$) significa che $\rho \to \infty$, per cui allo scopo di ottenere i risultati voluti occorre calcolare tale limite nelle eq.(13), nel caso in cui $v = 0$:

$$\begin{cases} v' = \lim\limits_{\rho\to\infty} \dfrac{2V}{1+\rho} = 0\,, \\ V' = \lim\limits_{\rho\to\infty} V\,\dfrac{1-\rho}{1+\rho} = -V\,, \end{cases}$$

che è quanto affermato nel testo.

[75] Ai nostri occhi, una tecnica forse rudimentale, ma comunque interessante e efficace, per calcolare il limite desiderato.

$-\frac{mV}{m} = -V$. *Onde si deduce ritornar indietro la sfera* M *dopo l'urto con tutta la sua velocità.*

Una superficie insuperabile elastica può considerarsi come una massa infinita, e perciò si può facilmente conoscere, che una sfera perfettamentì elastica, che urta in essa, dovrà ritornare indietro colla sua intiera celerità; e come tal ritorno non si farebbe se i corpi fossero molli, seguita, che la cagione di tali ritorni non altra sia che l'elaterio[76], *come osservò il dottissimo Wallis*[77].

7. Quando il corpo m *era in quiete, la sua velocità dopo l'urto diventa*[78] $\frac{2MV}{M+m}$ *; e come tal valore è minor di* $2V$ *, seguita che la velocità dal corpo urtato acquistata è sempre minore del doppio di quella, che aveva il corpo urtante. Più che s'impiccolisce il corpo* m *; la sua velocità acquistata più si avvicina*[79] *a* $2V$ *, in guisa che diventando* m *infinitamente piccolo, o* M *infinitamente grande, diventa esattamente* $2V$.

8. Se vi sono cento sfere perfettamente elastiche in progressione dupla, e il moto si principia dalla massima come propone l'Ugenio[80], *la celerità della prima alla celerità dell'ultima sarà secondo che determina Giovanni Bernoulli*[81] *come*[82] $1 : 2338500000000$.

Definizione.

"Velocità rispettiva"[83] *dicesi quella, che agisce nella percossa dei corpi. Quando i corpi si muovono verso la medesima parte*[84], *è chiaro, che non agisce nella percossa se non l'eccesso della velocità maggiore sulla minore; perché se amendue si movessero con eguale velocità in maniera che quanto l'uno è veloce in seguire, tanto l'altro fosse veloce in fuggire, non vi sarebbe percossa, e la velocità rispettiva sarebbe nulla. Ma quando si vengono incontro*[85], *allora la velocità di amendue agisce nella percossa, e perciò la loro velocità rispettiva è allora la somma stessa della loro velocità.*

9. Nell'urto diretto de' corpi perfettamente elastici si conserva sempre la stessa velocità rispettiva, cioè a dire la differenza delle loro celerità[86], *quando si muovono verso la medesima parte; e la loro somma, quando si muovono d'incontro. Ciò si deduce dai sopradetti canoni. Imperocché se si muovono amendue i corpi verso la medesima parte, la loro celerità rispettiva è* $V - v$. *Dopo l'urto la celerità del corpo* m *è* $\frac{2MV-Mv+mv}{M+m}$ *e la celerità di* M *è* $\frac{MV-mV+2mv}{M+m}$. *Sottraendo questa ch'è minore, da quella ch'è maggiore*[87], *si ha* $\frac{MV+mV-Mv-mv}{M+m}$ *; cioè* $V - v$. *Se si vengono incontro, allora la celerità dell corpo*[88] M *è* $\frac{MV-mV-2mv}{M+m}$ *, e quella del corpo* m *è*

---

[76] Cioè, la perfetta elasticità dell'urto.

[77] Vedi nota 10.

[78] Si veda la prima delle eq.(14).

[79] Come si può facilmente dedurre prendendo il limite della prima delle eq.(14) per $m \to 0$

[80] C. Huygens; si veda nota 12.

[81] Johann I Bernoulli o Jean I Bernoulli (Basilea, 1667 - Basilea, 1748) è stato un matematico svizzero, uno dei più importanti scienziati della famiglia Bernoulli, fratello minore di Jakob, il capostipite della famiglia. Educò il grande matematico Eulero ed è conosciuto per i suoi contributi al calcolo infinitesimale. Bernoulli presentò il risultato qui ricordato dal Crivelli nel suo *"Discorso sul moto"*.

[82] In realtà, il calcolo esatto fornisce come risultato: $1 : 2338486807660$; se ne fornisce una dimostrazione nel §5 (*Appendice 2*).

[83] Noi diremmo *Velocità Relativa*; con le notazioni precedenti potremo dire che la velocità relativa di M rispetto a m è data da: $V_R = V - v$, con V e v che vanno intese algebricamente, col loro segno.

[84] E quindi entrambe le velocità possono essere prese positive: $V > 0$ e $v > 0$.

[85] Nel qual caso, potremmo avere: $V > 0$, ma $v < 0$, e quindi la velocità relativa di M rispetto a m sarebbe: $V_R = V - v = V + |v|$.

[86] In realtà, l'invarianza della *Velocità Relativa* vale solo in valore assoluto; in effetti possiamo dimostrare che durante un urto elastico la velocità relativa di uno dei due corpi rispetto all'altro diventa esattamente l'opposta di quella che era prima dell'urto. Dalle eq.(13) troviamo infatti:

$$V'_R \equiv V' - v' = \frac{(M-m)V + 2mv}{M+m} - \frac{2MV - (M-m)v}{M+m} = -(V - v) \equiv -V_R\,.$$

Questo risultato è ovviamente indipendente dal sistema di riferimento, cosicché, mettendoci per esempio nel sistema di riferimento solidale con la particella *bersaglio* (diciamo m), in cui cioè questa è in quiete ($v = v' = 0$), vediamo che l'altra particella (M) nell'urto semplicemente inverte il proprio moto con la stessa velocità: $V' = -V$.

[87] Così facendo $(v - V)$, però, si ottiene in realtà l'*opposto* della velocità relativa di M rispetto a m; vedi nota 86.

[88] Nel testo originale del Crivelli, [1], a pag. 121, c'è un errore non segnalato neppure nell'*Errata Corrige* (posto alla fine del volume, alla pagina successiva alla 306): viene cioè data per m la velocità di M e viceversa; qui riproduciamo tale brano correggendo tale errore. Queste formule per v' e V' si ottengono semplicemente invertendo il segno alla velocità iniziale v di m nelle eq.(13). Come già sottolineato in precedenza, non sarebbe stato necessario trattare separatamente questo caso, considerando *algebricamente*,

$\frac{2MV+Mv-mv}{M+m}$. Prendendo la differenza di quella da questa (ch'è lo stesso, che prendere la loro somma riguardo ad una medesima direzione), si avrà $\frac{MV+Mv+mV+mv}{M+m}$ cioè $V+v$; ch'era la loro celerità rispettiva[89].

Qui interrompiamo la riproduzione del testo del Crivelli, che proseguirebbe con un *Lemma* relativo alla velocità del "Centro di Massa" (che l'autore chiama *Centro di Gravità*) di un sistema di corpi che si muovono in una stessa direzione, per concludere con la sua successiva *Annotazione*, interessante dal punto di vista storico.

Annotazione

Prima del Leibnizio[90] *non si è mai pensato, che in altra maniera possano essere le forze motrici, che come le velocità o come le quantità del moto. Egli fu il primo, che giudicò doversi distinguere le forze de' corpi, che si equilibrano, da quelle de' corpi, che sono in moto liberamente, o per parlare co' suoi termini, le forze "morte" dalle forze "vive": quelle essere come ill prodotto della massa nella velocità; queste come il prodotto della massa nel quadrato della velocità*[91]*. Egli provò il suo sentimento col perfetto accordo, che ha colla regola del Galileo per l'accelerazione de' gravi, per cui si vede, che un grave, che ha due gradi di celerità può ascendere quattro volte più alto di quello, che ne ha un solo grado*[92]*, e se ha tre gradi nove volte più alto, e sedici, se ne ha quattro. Si sono fatti molti contrasti col signor Papin, e l'Abate Catelano in Francia, indi in Inghilterra col signor Clarche, e per lungo tempo fu rigettato il suo sentimento. Uni de' primi dopo ventiotto anni in circa a dichiararsi del suo partito fu Giovanni Bernoulli*[93]*, e col suo esempio l'Ermano, dopo de' quali una gran quantità di Filosofi, tra' quali il Volfio*[94]*, il Gravesande*[95]*, e negli Atti di S. Pietroburgo Danielo Bernulli*[96]*, il Bulfingero*[97]*, ed altri. Ciò che principalmente persuase tali Filosofi, fu la forza della percossa de' corpi perfettamente elastici; la quale si conosce colla sperienza ascendere al quadrato della velocità. Che se si assume, come par ragionevole, che quella forza*[98]*, che si estingue nell'incontro di tali corpi, di nuovo si restituisca in guisa che siavi la stessa forza avanti l'urto di quello, che dopo l'urto*[99]*, ciò si vede esattamente osservato dalla natura, se si considerano le forze, come*

o meglio *vettorialmente*, le due velocità.

[89]Come nel caso precedente, naturalmente, la velocità relativa calcolata in questo modo è quella di m rispetto a M, cosicché troviamo di nuovo che in realtà la velocità relativa si è invertita durante l'urto.

[90]Gottfried Wilhelm von Leibniz (Lipsia, 1646 - Hannover, 1716), è stato un matematico, filosofo e scienziato tedesco; insieme a Newton, ma indipendentemente, fautore dell'introduzione e dei primi sviluppi del *Calcolo Infinitesimale*.

[91]In tal senso, la forza *morta* sarebbe associabile alla *Quantità di Moto* del corpo, mentre quella *viva* coinciderebbe, a meno di un fattore 2, con la sua *Energia Cinetica*; si veda la breve discussione su questo argomento data in [4].

[92]Si tratta di un problema elementare di fisica; applicando le leggi della cinematica del moto uniformemente vario è facile trovare che l'altezza raggiunta da un corpo lanciato verso l'alto con una velocità iniziale v_0 è data da $h = \frac{{v_0}^2}{2g}$, essendo g l'accelerazione (costante) di gravità ($g \simeq 9.8\ m/s^2$); risultato che può essere ottenuto anche applicando per l'appunto il cosiddetto "Teorema delle Forze Vive" (oggi più noto forse come *Teorema dell'energia cinetica*), secondo il quale la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro compito dalle forze esterne; nel nostro caso, essendo il lavoro quello compiuto dalla sola forza di gravità, che è negativo essendo questa forza opposta allo spostamento verso l'alto durante la salita del grave, si ottiene: $L = -mgh = \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$, da cui ritroviamo il risultato precedente per l'altezza raggiunta h . Naturalmente, la proporzionalità quadratica di h con la velocità iniziale v_0 spiega perchè raddoppiando la velocità iniziale si ottenga un'altezza quadrupla, o perché triplicandola si raggiunga un'altezza che è nove volte quella precedente, e così via.

[93]Vedi Nota 81.

[94]Christian Wolff (Breslavia, 1679 - Halle sul Saale, 1754) è stato un filosofo e giurista tedesco, autore di una monumentale opera di Fisica-Matematica: *"Elementa Matheseos Universae"*, in 5 voll. (1713-1715).

[95]Willem 's Gravesande ('s-Hertogenbosch, 1688 - Leida, 1742) è stato un filosofo, fisico e matematico olandese; uno dei maggiori sostenitori della nuova filosofia naturale newtoniana nel continente; tra le sue opere maggiori si segnalano i *"Physices elementa mathematica"* (1720), le *"Philosophiae Newtonianae Institutiones in usus Academicos"* (1723) ed una *"Introductio ad Philosophiam"* (1736).

[96]Daniel Bernoulli (Groninga, 1700 - Basilea, 1782) è stato un matematico e fisico svizzero, uno dei più importanti matematici della famiglia Bernoulli.

[97]Georg Bernhard Bilfinger (Kannstatt, 1693 - Stoccarda, 1750) è stato un filosofo tedesco di scuola wolffiana. Fu professore a Pietroburgo e a Tubinga. Sua opera principale è un trattato di *Metafisica*: *"Dilucidationes philosophicae de Deo, anima, mundo et generalibus rerum affectionibus"* (1725), in cui riprende i concetti fondamentali di Leibniz e di Wolff.

[98]Cioè la *Forza Viva*, ovvero l'Energia Cinetica.

[99]Qui si stabilisce la ben nota Legge di *Conservazione dell'Energia Cinetica*, valida nel caso degli urti elastici, legge precisata da Leibniz, e compatibile col modello teorico esposto dal Crivelli in queste pagine. Naturalmente, da tale legge si arriva facilmente al più generale *Principio di Conservazione dell'energia Meccanica*, valido per i "sistemi conservativi"; si veda, *e.g.*, i nostri *"Complementi di Fisica"* [6].

i prodotti delle masse nel quadrato della celerità, come abbiamo notato nella undecima osservazione, ma non già se si prendono come la quantità di moto.

Tale sentenza fu confermata con molte altre sperienze. Imperocché se si lasciano cadere diversi gravi da diverse altezze sopra l'argilla molle, le fosse, che si formano nell'argilla sono sempre proporzionali alle altezze, cioè a dire al quadrato della velocità[100] *. Il che maggiormente ha posto in chiaro col suo celebre sperimento il Sig. Marchese Poleni*[101]*. Imperocché sieno due sfere di metallo con diametro eguale, ma di peso diverso, onde l'una per esempio pesi una libra, e l'altra quattro libre. Se si lasciano cadere sull'argilla molle, o sul sevo*[102] *da altezze, che sono in ragione reciproca de' loro pesi, si vedono sempre farsi le fosse eguali*[103]*; il che non può farsi se la forza della percossa non è come il quadrato della velocità.*

A tali cose si aggiunge lo sperimento del Signor Gravesande, in cui lasciato cadere sull'estremo di una bilancia un peso, ha egli forza d'innalzare un peso proporzionale all'altezza, da cui discende, cioè a dire al quadrato della velocità; come si può vedere negli elementi[104] *della sua Fisica.*

Non resta però, che ancora non durino gravissime discordie intorno tale estimazione di forze; e ciò principalmente per due ragioni. La prima perché per comparare le forze non basta, come affermano, il misurare i loro effetti in qualunque tempo prodotti; ma bisogna misurar quelli che nella stessa quantità di tempo si fanno[105]*. La seconda è non potersi spiegare nel Sistema del Leibnizio, come due corpi molli ne' quali le masse sono in ragione inversa delle velocità incontrandosi direttamente, dopo di aversi urtato si fermino nel punto dell'urto*[106]*; perché dovrebbe prevalere quello, in cui la velocità è maggiore*[107]*. Sopra di che molte ingegnose dissertazioni sono state scritte da molti, come dal Sig. Kavalier de Louville*[108]*, dal Sig. de Crousatz*[109]*, dal Sig. Pemberton*[110]*, e in fine dall'ingegnosissimo nostro P. D. Francesco Maria Baldini.*

Interrompiamo qui la riproduzione del testo del Crivelli, nel punto in cui l'autore, un newtoniano, espone brevemente, con senso evidentemente piuttosto critico, *"Le Leggi del Moto secondo il Cartesio"*[111].

Concludiamo il nostro articolo con due *Appendici*. Nella prima dimostreremo, essenzialmente a fini didattici, che come sarebbe stato lecito aspettarsi, la massima perdita di Energia Cinetica si ha nel caso di un urto *Completa-*

[100] Ciò si può comprendere facilmente applicando il *Teorema delle Forze Vive* e ipotizzando una forza (*media*) costante F esercitata dall'argilla molle sul grave nel brevissimo intervallo di tempo in cui questo penetra in essa di un tratto δ prima di fermarsi; infatti, uguagliando il lavoro totale compiuto sul grave - dato dalla somma di quello esercitato da tale forza e da quella di gravità, che possiamo tranquillamente trascurare - alla variazione della sua Energia cinetica, otteniamo: $L_{tot} = -F\,\delta + m\,g\delta \simeq -F\,\delta = \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}\,m\,v_0{}^2 = -m\,g\,h$, da cui segue la proporzionalità diretta della profondità δ della *fossa* prodotta nell'argilla con l'altezza di caduta del grave h: $\delta = \frac{m\,g}{F}\,h$, dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la conservazione dell'energia meccanica, ovvero il risultato secondo il quale la velocità con cui un grave raggiunge il suolo se lasciato cadere da un'altezza h è data dalla (*Formula di Torricelli*): $v_0 = \sqrt{2\,g\,h}$.

[101] Giovanni Poleni (Venezia, 1683 - Padova, 1761) è stato un matematico, fisico e ingegnere italiano.

[102] Grasso rappreso d'alcuni animali, che serve per far candele (*Lessicografia della Crusca*).

[103] Infatti, ipotizzando le altezze di caduta h essere inversamente proporzionali al peso mg del grave, da quanto detto nella nota 100 segue immediatamente che le profondità δ delle fosse restano invariate.

[104] *Nota originale dell'autore*: *Lib. I, cap. 23, Scolio 3, Ediz. 2.*

[105] Questa frase allude al fatto che l'effetto del protrarsi di una forza per un certo intervallo di tempo - uguale alla variazione della Quantità di Moto del corpo, nel caso in cui questa sia l'unica forza agente - essendo dato dal suo *"Impulso"* I definito nell'eq.(3), non è in generale possibile risalire all'intensità della forza stessa.

[106] Si tratta in realtà di un falso problema; nel caso dell'urto (*completamente* anelastico) tra due corpi molli si conserva solo la Quantità di Moto totale, che è nulla nel caso considerato (essendo $M\,V = m\,|v| = -m\,v$), ma non l'Energia Cinetica (*i.e.*, la *Forza viva*).

[107] Non è vero! Ciò violerebbe infatti la *Conservazione della Quantità di Moto*, garantita dal fatto che i due corpi costituiscono durante l'urto un *Sistema Isolato*.

[108] Jacques Eugene d'Allonville de Louville, chiamato abitualmente Chevalier de Louville (Louville-la-Chenard, 1671 - Saint-Jean-de-Braye, 1732) è stato un astronomo e matematico francese.

[109] Jean Pierre de Crousatz (Losanna, 1663 - Losanna, 1750) è stato un filosofo e matematico svizzero, appartenente a una nobile famiglia.

[110] Henry Pemberton (1694 - 1771), filosofo e scienziato inglese, fu uno dei primi fautori della filosofia newtoniana, di cui presentò una versione semplificata e non matematica nella sua opera *"A View of Sir Isaac Newton's Philosophy"* (Londra, 1728); fu anche l'editore della terza edizione dei *"Principia Mathematica"* stessi.

[111] [1], Parte Prima, pag. 125.

mente Anelastico[112], utilizzando il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*. Nella seconda affronteremo il problema proposto da Huygens e descritto dal Crivelli nell'*ottavo corollario*, problema risolto da Giovanni Bernoulli che riuscì a dare una valutazione approssimata del risultato.

4 Appendice 1

Per dimostrare in quali situazioni, cioè in quali tipi di urti, si ottenga la massima (e la minima) perdita di Energia Cinetica, occorre riprendere il caso generale di un urto *parzialmente anelastico* studiato nel §2.3, per il quale valgono i risultati dati dalle eq.(16). Invece di considerare la frazione di energia cinetica persa K ($= |\Delta E_c|/E_c(iniz)$) come *parametro* noto per trovare le velocità finali v' e V' delle due particelle, come fatto in §2.3, vogliamo trovare i valori estremi di K, cioè il suo massimo e il suo minimo, considerando come variabili indipendenti le due velocità finali v' e V'. Dal punto di vista matematico, si tratta di un semplice problema di *estremo vincolato*, che risolveremo col metodo dei *Moltiplicatori di Lagrange*.

Per semplificare le nostre equazioni poniamo:

$$\Gamma =: \frac{1}{V^2 + \rho\, v^2}\,, \qquad\qquad \Pi =: V + \rho\, v\,. \tag{19}$$

La *funzione* da estremizzare K, ottenuta dalla seconda delle eq.(16), si può allora esprimere come:

$$K(v';V') = 1 - \Gamma\,({V'}^2 + \rho\, {v'}^2)\,, \tag{20}$$

(con $K \in [0\,,1)$) soggetta all'*equazione di vincolo* data dalla prima delle eq.(16):

$$g(v';V') = V + \rho\, v - V' - \rho\, v' = \Pi - V' - \rho\, v' = 0\,. \tag{21}$$

Un punto di *estremo* coincide con le velocità finali date dalle eq.(13), che chiaramente portano al valore minimo ammissibile che può assumere la funzione K, cioè $K = 0$, corrispondendo all'urto *elastico* in cui non c'è alcuna perdita di energia. Per trovare l'altro punto di estremo, per il quale si ottiene il valore massimo di K, occorre risolvere il seguente sistema, come prescritto dal *metodo dei Moltiplicatori di Lagrange*:

$$\begin{cases} \nabla K = \lambda\, \nabla g\,, \\ g = 0\,, \end{cases} \tag{22}$$

dove λ è il *moltiplicatore di Lagrange* e i *gradienti* ∇K e ∇g sono dati da:

$$\begin{cases} \nabla K \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial K}{\partial v'} \\ \dfrac{\partial K}{\partial V'} \end{pmatrix} \;=\; -\begin{pmatrix} 2\,\Gamma\, V' \\ 2\,\Gamma\,\rho\, v' \end{pmatrix}\,, \\[2em] \nabla g \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial v'} \\ \dfrac{\partial g}{\partial V'} \end{pmatrix} \;=\; -\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}\,. \end{cases} \tag{23}$$

Sostituendo queste espressioni nelle eq.((22)) si ottiene quindi il seguente sistema di equazioni:

[112] Quella *minima* è nulla, e chiaramente si realizza nel caso dell'urto elastico.

$$\begin{cases} 2\,\Gamma\, V' = \lambda\,, \\ 2\,\Gamma\,\rho\, v' = \lambda\,\rho\,, \\ V' + \rho\, v' = \Pi\,, \end{cases} \tag{24}$$

dalla cui risoluzione si arriva facilmente al seguente risultato:

$$V' = v' = \frac{\Pi}{1+\rho} = \frac{V+\rho\, v}{1+\rho} = \frac{M\,V + m\,v}{M+m}\,, \tag{25}$$

che infatti corrisponde, come ci aspettavamo, a quanto ottenuto nel caso di un urto *completamente anelastico*, eq.(7), con velocità finali uguali dopo l'urto per le due particelle. Il valore *massimo* di K, che corrisponde quindi a questa soluzione, può essere ottenuto sostituendo le (25) nell'eq.(20):

$$\begin{aligned} K_{max} &= 1 - \Gamma\,(V'^2 + \rho\, v'^2\,) = 1 - \frac{(V+\rho\, v)^2}{(1+\rho)\,(V^2+\rho\, v^2)} = \frac{\rho\,(V-v)^2}{(1+\rho)\,(V^2+\rho\, v^2)} = \\ &= \frac{\mu\,(V-v)^2}{M\,V^2 + m\,v^2} = \frac{1}{E_c(iniz)}\,\frac{1}{2}\,\mu\,(V-v)^2\,, \end{aligned} \tag{26}$$

equivalente ovviamente al risultato dato nell'eq.(10).

5 Appendice 2

Come già detto, in questa seconda *Appendice* vogliamo fornire una soluzione ad un problema particolare proposto da Huygens e poi risolto da Giovanni Bernoulli, che riuscì a darne un risultato numerico approssimato. Il Crivelli[113] ricorda questo problema inserendolo nel suo *Corollario 8*, che noi abbiamo riportato integralmente nel §3.1.

Il problema è il seguente. Si abbiano n sferette di masse in progressione doppia l'una rispetto all'altra; diciamo $m_1 = M$, $m_2 = m_1/2 = M/2$, $m_3 = m_2/2 = M/2^2, \ldots, m_k = m_{k-1}/2 = M/2^{k-1}\,, \ldots, m_n = M/2^{n-1}$. Le sferette siano tutte allineate ed inizialmente in quiete, eccetto la prima, più pesante, che si muove verso la seconda con una velocità V_0, urtandola centralmente. Questa, a sua volta, essendosi messa in moto, urterà la terza, e così via, fino all'ultima sferetta, l'n-esima, di massa m_n. Ci si chiede quant'è il rapporto tra la velocità di questa, ${v_n}'$, e quella della prima, incidente con velocità V_0, nell'ipotesi in cui tutti gli urti siano perfettamente elastici.

Applicando iterativamente il risultato dato dalla prima delle eq.(14) possiamo scrivere:

$$\begin{cases} {v_2}' = \dfrac{2\,M}{M+m_2}\,V_0 = \dfrac{2\,M}{M+\frac{M}{2}}\;V_0 = \dfrac{4}{3}\,V_0\,, \\ {v_3}' = \dfrac{2\,m_2}{m_2+m_3}\,{v_2}' = \dfrac{2\,m_2}{m_2+\frac{m_2}{2}}\;{v_2}' = \dfrac{4}{3}\,{v_2}' = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2\,V_0\,, \\ \vdots \\ {v_k}' = \dfrac{2\,m_{k-1}}{m_{k-1}+m_k}\,{v_{k-1}}' = \dfrac{2\,m_{k-1}}{m_{k-1}+\frac{m_{k-1}}{2}}\,{v_{k-1}}' = \dfrac{4}{3}\,{v_{k-1}}' = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{k-1}\,V_0\,, \\ \vdots \\ {v_n}' = \dfrac{2\,m_{n-1}}{m_{n-1}+m_n}\,{v_{n-1}}' = \dfrac{2\,m_{n-1}}{m_{n-1}+\frac{m_{n-1}}{2}}\,{v_{n-1}}' = \dfrac{4}{3}\,{v_{n-1}}' = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}\,V_0\,, \end{cases} \tag{27}$$

[113] A pag. 121 della *Parte Prima*, [1].

da cui otteniamo il rapporto cercato:

$$\frac{v_n{}'}{V_0} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} . \tag{28}$$

Nel caso specifico risolto da Bernoulli e ricordato dal Crivelli, con il numero n di sferette uguale a 100, il risultato numerico *esatto* che troviamo è:

$$\frac{v'_{100}}{V_0} = \left(\frac{4}{3}\right)^{99} = 2338486807660\,, \tag{29}$$

non lontano dal risultato (approssimato) ottenuto da Bernoulli: 2338500000000.

A conclusione di questa seconda *Appendice* vogliamo verificare, sempre a fini didattici, che nel problema proposto da Huygens che abbiamo appena risolto, viene rispettata la *Conservazione della Quantità di Moto*.

La velocità finale $V_1{}'$ della prima sferetta di massa M può essere determinata applicando la seconda delle eq.(14), grazie alla quale si trova:

$$V_1{}' = \left(\frac{M - m_2}{M + m_2}\right) V_0 = \left(\frac{M - \frac{M}{2}}{M + \frac{M}{2}}\right) V_0 = \frac{1}{3}\, V_0\,, \tag{30}$$

cosicché la sua quantità di moto (*q.d.m.*) dopo l'urto con m_2 risulta essere:

$$Q_1{}' = M\, V_1{}' = \frac{1}{3}\, M\, V_0\,. \tag{31}$$

La seconda sferetta, di massa $m_2 = M/2$, avente una velocità $v_2{}'$ prima dell'urto con la terza sferetta data in eq.(27), dopo tale collisione sarà caratterizzata da una velocità finale ottenibile applicando di nuovo la seconda delle eq.(14):

$$V_2{}' = \left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right) v_2{}' = \left(\frac{m_2 - \frac{m_2}{2}}{m_2 + \frac{m_2}{2}}\right) v_2{}' = \frac{1}{3}\, v_2{}' = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\, V_0\right), \tag{32}$$

a cui corrisponde una *q.d.m.* data da:

$$Q_2{}' = m_2\, V_2{}' = \frac{M}{2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\, V_0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) M\, V_0\,. \tag{33}$$

Analogamente, la terza sferetta di massa $m_3 = m_2/2 = M/2^2$, incidendo sulla quarta con una velocità iniziale data da $v_3{}' = \left(\frac{4}{3}\right)^2 V_0$, assumerà dopo questo urto una velocità finale:

$$V_3{}' = \left(\frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4}\right) v_3{}' = \left(\frac{m_3 - \frac{m_3}{2}}{m_3 + \frac{m_3}{2}}\right) v_3{}' = \frac{1}{3}\, v_3{}' = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2 V_0\,, \tag{34}$$

con la quale troviamo che la sua *q.d.m.* sarà:

$$
Q_3{}' = m_3\, V_3{}' = \frac{M}{2^2}\,\frac{1}{3}\,\left(\frac{4}{3}\right)^2\, V_0\; = \frac{1}{3}\,\left(\frac{2}{3}\right)^2\, M\, V_0\,, \tag{35}
$$

e così via, fino alla penultima sferetta, l'*(n-1)*-esima, che dopo aver colpito l'ultima (l'n-esima) avrà acquistato una *q.d.m.* uguale a:

$$
Q_{n-1}{}' = m_{n-1}\, V_{n-1}{}' = \frac{M}{2^{n-2}}\;\frac{1}{3}\,\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}\, V_0\; = \frac{1}{3}\,\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\, M\, V_0\,. \tag{36}
$$

Peraltro, poiché l'ultima sferetta non causa ulteriori collisioni, questa resterà con una velocità finale data dall' eq.(28), e sarà quindi caratterizzata da una *q.d.m.* finale uguale a:

$$
Q_n{}' = m_n\, v_n{}' = \frac{M}{2^{n-1}}\;\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\, V_0\; = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\, M\, V_0\,. \tag{37}
$$

Sommando quindi le *q.d.m.* finali di tutte le n sferette si ottiene[114]:

$$
\begin{aligned}
Q_{tot}{}' &= \sum_{1=1}^{n}\; Q_i{}' = \frac{1}{3}\,M\,V_0 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\,M\,V_0\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\,M\,V_0\right) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\,M\,V_0\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\, M\,V_0 = \\
&= \frac{1}{3}\,M\,V_0\,\left\{1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right\} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\, M\,V_0 = \\
&= \left\{\frac{1}{3}\,\sum_{k=0}^{n-2}\,\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\,M\,V_0 = \left\{\frac{1}{3}\,\cdot\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\,M\,V_0 = M\,V_0\;\equiv Q_0\,, \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned} \tag{38}
$$

coincidente infatti con la Quantità di Moto iniziale che aveva il sistema prima delle (n-*1*) collisioni, data da quella della prima sferetta incidente di massa M.

References

[1] Giovanni Crivelli, *"Elementi di Fisica", (Parte Prima).*, Venezia, 1731.

[2] René Des-Cartes, *"Principia Philosophiae"*, Amsterdam, 1644.

[3] Stefano Ranfone, *"Sulla prima versione italiana del Principio di Minima Azione di Maupertuis e sulla sua discussione del Modello Cartesiano dei Vortici"*, (2017); URL: https://www.academia.edu/34893321/

[4] Stefano Ranfone, *"L'Introduzione delle Leggi del Moto di Newton nei 'Philosophiae Naturalis Institutionum libri tres' di Pietro di Martino - Lettura Critica con Note e Commenti di alcuni brani scelti"*, (2017); URL: https://www.academia.edu/35863667/

[5] Pietro Di Martino, *"Philosophiae Naturalis Institutionum libri tres"* (3 voll.), Napoli (1738).

[6] Stefano Ranfone, *Complementi di Fisica*, Pisa, ETS, 2016.

[114] Utilizzando nell'ultimo *step* il risultato: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.