Breve Nota sul "Paradosso di Zenone"

Stefano Ranfone *

1 Introduzione

Uno dei più famosi "paradossi" matematici, o forse dovremmo dire *fisico-matematici*, ereditati dall'antichità, è senza dubbio il cosiddetto "Paradosso di Zenone", talvolta detto anche *"di Achille e la Tartaruga"*. La sua descrizione può essere anche trovata nella maggior parte dei testi scolastici di Filosofia Antica, ma senza una adeguata trattazione fisico-matematica. In questa breve *Nota* vogliamo fornire una duplice *soluzione* di questo paradosso. Dalla prima si evince che l'origine del paradosso è essenzialmente connessa con le difficoltà degli antichi a trattare il concetto matematico di *"Infinito"*, difficoltà che furono completamente superate durante la *Rivoluzione Scientifica* del XVII secolo, con lo sviluppo del Calcolo Differenziale ad opera di Newton e Leibniz. Nella seconda, più banalmente, si utilizzeranno le leggi del Moto Relativo (Relatività Galileiana).

Prima di passare alla descrizione e soluzione del Paradosso, riteniamo possa essere interessante, anche da un punto di vista *storico*, riportare la descrizione che ne dette Giovanni Crivelli, uno dei primi filosofi che *importò* in Italia la Fisica Newtoniana, ad una cinquantina di anni dalla pubblicazione del famoso *"Principia Mathematica Philosophiae Naturalis"*, del filosofo inglese[1]. Il testo di Crivelli, in due volumi, dal titolo "Elementi di Fisica", fu stampato per la prima volta a Venezia da Stefano Orlandini tra il 1731 e il 1732. A pag. 67 della *Prima Parte*, all'inizio del *Capitolo II* dal titolo "Della esistenza del moto", così viene descritto il Paradosso di Zenone:

Sebben'è cosa evidente per se, che siavi il moto in natura, ed è una vanità Pirronica il negarlo, con tutto ciò non mancarono alcuni Filosofi, che, non credo già perché dubitassero, ma se non altro per far conoscere il loro ingegno, proposero alcuni Sofismi non facilmente risolubili per convincere, che non si dà moto nell'Universo.

Uno de' più celebri è quello di Zenone, il qual'è questo.

Siavi Achille distante da una Testudine un miglio, e si supponga essere quello cento volte più veloce di questa. Dunque mentre Achille percorre il miglio, ch'egli dista dalla Testudine, questa si avanzerà il centesimo di un miglio; mentre Achille percorre questo centesimo, la Testudine si avanzerà un diecimillesimo; e mentre Achille percorrerà questo diecimillesimo, la Testudine farà un milionesimo. Così se si vada seguitando in infinito non si troverà mai, che Achille possa superar la Testudine, il ch'è contro la sperienza.

A questo punto il Crivelli descrive nei seguenti termini la soluzione del Paradosso:

Ma tale argomento, alla risoluzione del quale tanti concorsero indarno[2]*, facilmente si scioglie da quello, che ha un poco di conoscimento delle Serie infinite*[3]*, ed ha imparato come una serie infinita può avere una somma finita*[4]*, e perciò in un tempo finito si può percorrere. Imperocché poniamo, che Achille abbia in un'ora percorso un miglio.*

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

[1] Isaac Newton, "Principia Mathematica Philosophiae Naturalis", Londra, 1687.

[2] *i.e.*, invano.

[3] L'autore inserisce qui una *Nota* a piè pagina: *"Vedere i nostri Elementi di Aritmetica Sez. 4."*, nella quale rimanda il lettore alla sua *Opera*, in cui espone, fra l'altro, gli elementi del "Calcolo Infinitesimale", da poco sviluppato dai già citati Newton e Leibniz.

[4] Nell'*Appendice* daremo l'esempio della *Serie Geometrica*, che per l'appunto servirà a fornire la soluzione del Paradosso di Zenone.

Dunque il centesimo di un miglio lo percorrerà in un centesimo di ora, e il diecimillesimo di un miglio in un diecimillesimo di un'ora, e così seguitando.

Se un'ora insieme con un centesimo, indi con un diecimillesimo, indi con un un milionesimo ec. fosse un tempo infinito, Achille non potrebbe mai giugnere la Testudine. Ma $\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000}$ *ec. sono lo stesso*[5]*, che* $\frac{1}{90}$. *Dunque Achille giugnerà la Testudine dopo un'ora, ed un nonagesimo*[6] *di ora.*

Questa è la descrizione del Paradosso di Zenone e della sua risoluzione, così come veniva presentata dal Crivelli nel suo "Libro di fisica", nella prima metà del Settecento.

Vediamone adesso due descrizioni in un linguaggio più moderno. La prima privilegerà maggiormente l'aspetto matematico, la seconda quello fisico.

2 "Setup" del Problema relativo al Paradosso di Zenone, e sua risoluzione "Matematica"

Siano v e V ($\equiv k\,v$) le velocità della tartaruga (che chiameremo T) e di Achille (che chiameremo invece A), rispettivamente (dove, evidentemente, $k \gg 1$). Sia quindi d la loro distanza iniziale (*i.e.*, all'istante $t = 0$). Possiamo allora descrivere il paradosso nei seguenti termini:

Achille (A) percorre la distanza iniziale d (tra A e T) in un tempo:

$$t_1 = \frac{d}{V} = \frac{d}{k\,v}\,;$$

nel frattempo la tartaruga T sarà però avanzata di uno spazio:

$$x_1 = v\,t_1 = \frac{d}{k}\,;$$

A percorrerà quindi questa "nuova" distanza x_1 (da T) in un tempo:

$$t_2 = \frac{x_1}{V} = \frac{d/k}{k\,v} = \frac{d}{k^2\,v}\,;$$

ma in tale intervallo di tempo la tartaruga T sarà ulteriormente avanzata di uno spazio:

$$x_2 = v\,t_2 = \frac{d}{k^2}\,,$$

e così via.

[5]In realtà, si tratta di un errore, che peraltro l'autore segnala alla fine del volume (dopo pag. 306), inserendone la correzione tra gli *"Errori più notabili da correggersi"*. In effetti, il risultato corretto della *somma infinita* $\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \dots$ non è $\frac{1}{90}$, bensì $\frac{1}{99}$, come si evince anche dalla dimostrazione che diamo in *Appendice*:

$$x + x^2 + \cdots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1}\,,$$

che per $x = \frac{1}{100}$ dà come risultato $\frac{1}{99}$, e non $\frac{1}{90}$.

[6]Naturalmente, alla luce di quanto detto nella nota precedente, l'autore negli *"errata"* dà la dicitura corretta: "un nonagesimo nono di ora", *i.e.*, un novantanovesimo.

Di conseguenza, lo spazio *totale* percorso da Achille (A) (prima di raggiungere la tartaruga T) sarà dato dalla seguente somma:

$$S_{T(A)} = d + x_1 + x_2 + \cdots = d\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \ldots\right) = d\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \,,$$

dove, per brevità, si è posto $\lambda = 1/k$. Come mostreremo nell'*Appendice*, la "Somma infinita" contenuta in questa formula (detta *Serie Geometrica* di ragione λ), nel caso in cui $|\lambda| < 1$ risulta essere *finita*[7] ed uguale a $\frac{1}{1-\lambda}$, per cui otteniamo:

$$S_{T(A)} = d\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{d}{1-\lambda} = \frac{d}{1-\frac{1}{k}} = \frac{d}{1-\frac{v}{V}} = \frac{d\,V}{V-v} \,,$$

e il tempo impiegato dallo stesso Achille a raggiungere la tartaruga sarà quindi pure *finito* e dato da:

$$\tau = \frac{S_{T(A)}}{V} = \frac{d}{V-v} \,,$$

risolvendo quindi il "Paradosso" stesso.

3 Risoluzione "Fisica" del Paradosso

Una *risoluzione* del Paradosso si sarebbe tuttavia potuta ottenere molto più banalmente affrontando il problema da un punto di vista, per così dire, più *"fisico"*. Studiando infatti la situazione rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la tartaruga, rispetto al quale quindi questa è in quiete, Achille, inizialmente distante d dalla tartaruga, risulta essere in moto con una *velocità "relativa"*:

$$v_R = V - v \,,$$

per cui impiegherà un tempo (*finito*) τ per raggiungere la tartaruga (immobile nel sistema di riferimento *relativo* che stiamo adottando) dato da:

$$\tau = \frac{d}{v_R} = \frac{d}{V-v} \,,$$

e lo spazio che avrà percorso, misurato però nel "Sistema Assoluto" (il cosiddetto *Sistema del Laboratorio*, rispetto al quale entrambi si muovono ed *il suolo è fermo !*), sarà perciò dato da:

$$S_{T(A)} = V\,\tau = \frac{d\,V}{V-v} = \frac{d}{1-\frac{v}{V}} \,;$$

entrambi i risultati sono chiaramente in accordo con quanto ottenuto nel §2. Ciò conclude la risoluzione del Paradosso di Zenone.

[7] Vedi l'*Appendice*.

4 Appendice: La Serie Geometrica

In questa *Appendice* vogliamo fornire la dimostrazione della formula relativa al valore (*finito*) che assume la cosiddetta "Serie Geometrica".

Si consideri innanzitutto la seguente *Sommatoria* di un numero finito (n) di termini:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \equiv 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n \, .$$

Con semplici passaggi algebrici si ottiene che:

$$S_n - 1 = \lambda \, (1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{n-1}) = \lambda \, (S_n - \lambda^n) = \lambda \, S_n - \lambda^{n+1} \, ,$$

da cui:

$$S_n \, (1 - \lambda) = 1 - \lambda^{n+1},$$

ovvero, in definitiva:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \, .$$

La corrispondente sommatoria *infinita*, detta "Serie Geometrica" (di *ragione* λ), si ottiene prendendo il limite per $n \to \infty$:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \, .$$

È facile rendersi conto che questo limite esiste finito solo se $|\lambda| < 1$, (poiché in tal caso, per $n \to \infty$ il termine $\lambda^{n+1} \to 0$), fornendo il seguente valore della somma:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1 - \lambda} \, .$$

Questo è esattamente il risultato che abbiamo usato nel §2 per risolvere il Paradosso di Zenone da un punto di vista più "*Matematico*".