Sulla prima versione italiana del Principio di Minima Azione di Maupertuis e sulla sua discussione del “Modello Cartesiano dei Vortici”

Stefano Ranfone *

Abstract

Keywords: Maupertuis, Principio di Minima Azione, Cosmologia, Moti Planetari, Astronomia, Fermat, Keplero, Cartesio.

Nella prima parte di questo lavoro si vuole riproporre, commentandola, la prima versione in italiano (1768) del “Principio di Minima Azione” di Maupertuis , così come fu presentata nel suo “Saggio di Cosmologia”, nella traduzione di Orazio degli Arrighi Landini. Nella seconda parte presenteremo invece l’analisi del “Sistema Cartesiano” basato sui Vortici fatta dallo stesso Maupertuis e contenuta nel suo “Discorso sulle diverse configurazioni delle stelle”, ancora riproponendo la prima versione italiana operata dal medesimo traduttore [1].

[In the first part of this paper we wish to present the first italian version (1768) of the “Maupertuis’ Principle of Least Action” as given in his “Essay on Cosmology”, in the translation realized by Orazio degli Arrighi Landini. In the second part we shall instead present the analysis of the Cartesian system of the World based on the “Theory of Vortices”, as given by the same french philosopher in his “Discorso sulle diverse configurazioni delle stelle”, again in the original first italian version realized by the same translator.]

1 Introduzione

In Fisica il nome di Maupertuis viene spesso associato al cosiddetto “Principio di Minima Azione” [2], [3], uno dei princìpi fondamentali sul quale sono basate ancora oggi molte delle teorie e modelli della Fisica Moderna, sia nell’ambito delle teorie quantistiche di campo (QFT) che in Relatività Generale. Perfezionato da Eulero e Lagrange[1], che ne diedero una forma matematicamente più precisa, il Principio di Minima Azione fu inizialmente introdotto proprio da Maupertuis, che invece ne privilegiò gli aspetti più *metafisici*, arrivando a pensare che il Principio stesso potesse costituire una prova dell’esistenza e perfezione di un Ente Supremo. Da un punto di vista più prettamente scientifico, l’obiettivo era quello di trovare un *principio fondamentale* che potesse spiegare le leggi della dinamica, già emerse nella seconda metà del XVII secolo grazie ai lavori di Galileo prima e Newton poi, sintetizzate meravigliosamente nei *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* (1687) [5]. Tentativi in tal senso erano già stati proposti da altri filosofi, come Cartesio [6] e Leibniz [7], studiando in particolare il trasferimento di moto nell’urto tra due corpi. Il primo ipotizzò semplicemente quello che poi sarebbe stato definito come la “conservazione della quantità di moto”, grandezza già definita all’epoca, così come oggi, come somma dei prodotti delle masse per le velocità di ciascun corpo; questa ipotesi, come è noto, è tuttavia corretta solo nel caso di urti *isolati*, ed è comunque insufficiente a render conto in generale di tutti i fenomeni meccanici. Il secondo ipotizzò ciò che oggi diremmo la “conservazione dell’energia cinetica” (allora detta *Forza Viva*), definita modernamente

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

[1] Per una trattazione generale del *Principio di Minima Azione* in Meccanica si rimanda ai classici testi [4], mentre per un’esposizione del suo sviluppo storico si veda [2], [3].

come somma su tutti i corpi del semiprodotto delle masse per il quadrato delle rispettive velocità; purtroppo però, anche questo *principio*[2] non ha validità generale, essendo rispettato solo nell'ipotesi di *Urti Elastici* (o urti tra corpi *elastici*, anziché tra corpi *duri*), e di nuovo non può essere utilizzato per spiegare o dedurre le leggi della meccanica. Così fu proprio Maupertuis a proporre il *corretto* principio, ottenuto generalizzando alla meccanica un suo risultato derivato dallo studio della rifrazione della luce. Il fatto curioso è che l'applicazione di tale principio a questo fenomeno, almeno nella sua forma originaria, aveva portato Maupertuis ad un risultato sbagliato, lo stesso ottenuto da Cartesio, ma partendo da ipotesi diverse. Infatti, secondo il loro risultato, il rapporto tra i seni degli angoli di incidenza θ_1 e di rifrazione θ_2, nel passaggio della luce da un mezzo ad un altro, sarebbe dovuto essere uguale al reciproco del rapporto tra le rispettive velocità di propagazione (v_1 e v_2):

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_2}{v_1}\,, \tag{1}$$

contrariamente alla corretta e ben nota *legge di Snell*, secondo la quale:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \equiv \frac{n_2}{n_1}\,, \tag{2}$$

essendo n_1 ed n_2 i relativi *indici di rifrazione*[3]. Naturalmente, sia Cartesio che lo stesso Maupertuis, non potettero rendersi conto dell'errore commesso, in virtù del fatto che, essendo loro convinzione che la velocità della luce fosse maggiore nei mezzi più *densi* (come l'acqua o il vetro) e minore in quelli più *rarefatti* (come l'aria) - il che è equivalente a supporre che $\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1}$ - alla fine riproducevano il "corretto" risultato dato dalla legge empirica di Snell (eq.(2)). Nel §4 mostreremo esplicitamente come l'applicazione del Principio di Maupertuis allo studio della rifrazione della luce tra due mezzi distinti conduca al risultato *sbagliato* dato in eq.(1), mentre nel successivo §5 vedremo come il risultato *corretto* dato in eq.(2) si possa ottenere, nel rispetto del "Principio di Fermat"[4], imponendo che sia il tempo trascorso ad essere MINIMO, anziché l'Azione come suggerito da Maupertuis. D'altra parte, l'applicazione del principio di Maupertuis alla meccanica ebbe un così tale successo, specialmente nella forma definitiva dovuta ai contributi di Eulero e Lagrange prima, e di Hamilton e Jacobi poi, che costituì uno dei pilastri di quella che sarebbe stata poi detta "Meccanica Analitica" [4], [3]. Anche da un punto di vista puramente matematico le tecniche introdotte dal Principio di Maupertuis aprirono un nuovo campo della fisica-matematica, il *Calcolo delle Variazioni*[5], essenzialmente un'estensione del comune calcolo differenziale.

Il Principio di Minima Azione fu presentato una prima volta *in una memoria letta a dì 15 Aprile 1744 nella Assemblea pubblica della Real Accademia delle Scienze di Parigi*[6], pubblicata in francese nel 1748 [9] e poi, sempre in francese, inclusa nella prima edizione del suo *Essai de Cosmologie*, stampata nel 1751 [10]. La prima apparizione in Italia avvenne solo nel 1768, nella *Prefazione* del "Saggio di Cosmologia"[1] (a pag.28) dello stesso Maupertuis, nella traduzione operata da Orazio degli Arrighi Landini. Vista la relativa rarità di questa edizione[7], presente solo in una decina di biblioteche pubbliche in Italia, si è ritenuto di un certo interesse, se non anche di una qualche curiosità scientifica, riproporre qui la presentazione del suddetto *Principio*, direttamente nella forma data dal Maupertuis. Per lo stesso motivo si è anche pensato di riproporre nella seconda parte del presente lavoro, accompagnandola con qualche commento, la discussione fatta dal filosofo francese in relazione alle difficoltà del modello Cartesiano dei *Vortici* alla luce delle leggi di Keplero sul moto dei pianeti. Questa *discussione* è contenuta nel suo "Discorso sulle diverse configurazioni delle Stelle"[8], presentato (in *Prima edizione* italiana) a seguito del *Saggio di Cosmologia* nell'edizione del 1768 [1].

[2]Associabile al cosiddetto *Teorema "delle Forze Vive"*.

[3]Si ricorda che l'*Indice di Rifrazione* di un mezzo, sempre ≥ 1, è definito come il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto (c) e quella effettiva nel mezzo considerato.

[4]Si veda la discussione presentata da R. Dugas in [3], da pag. 254.

[5]Si veda, per esempio, la *Seconda Parte* del testo di Elsgolts [8].

[6]In questi termini si esprime l'Autore, nel suo "Saggio di Cosmologia", a pag. 28 della prima edizione italiana del 1768 che qui seguiamo [1].

[7]Non ci risulta esistere una versione digitalizzata sul WEB.

[8]Questo *Discorso* venne ripubblicato in una nuova versione italiana dieci anni più tardi, nel 1778, a Napoli, con un titolo diverso: "Trattato della gravità", insieme alla "Lettera sulle Comete" (che era già apparsa in lingua italiana all'interno dell'edizione veneziana

2 Il Principio di minima Azione nella sua prima versione in italiano

Come già accennato, Maupertuis dedusse il suo *Principio* partendo dallo studio del fenomeno della rifrazione della luce, cercando una generalizzazione del *Principio di Fermat* [3]. Lo scopo era fondamentalmente quello di trovare un'alternativa alle leggi della dinamica di Newton, ritenute corrette[9], ma insufficienti a descrivere e rendere conto dell'intera struttura dell'Universo, basandosi solo sulla *Gravitazione Universale*. In un certo senso, l'estensione alla Meccanica dell'idea di Fermat operata da Maupertuis è ciò che costituisce lo stesso "Principio di Minima Azione". Maupertuis presentò il suo risultato sottolineandone marcatamente i suoi aspetti metafisici e *finalistici*, vedendone in qualche modo anche una prova dell'esistenza stessa di un Ente Supremo. Solo grazie a Eulero e Lagrange, che ne presentarono una versione matematicamente più precisa e corretta, il *Principio* si liberò da tali aspetti metafisici e acquisì l'attuale significato fisico[10].

Vediamo comunque in che forma fu presentato questo importante *Principio* nella lingua italiana, nella sua prima versione, dovuta a Orazio degli Arrighi Landini[11].

... Il sistema intero della Natura basta a convincerci, che un Essere infinitamente Potente, ed infinitamente Saggio ne è l'autore, e vi presiede. Ma se, come hanno fatto diversi Filosofi, ci attacchiamo a qualche porzione di esso, saremo costretti a confessare, che gli argomenti, i quali se ne deducono, non sono corredati da tutta la forza, che noi c'immaginiamo. Vi è troppo di "bello", e troppo di "buono" nell'Universo, onde potessimo non ammirarvi la mano di Dio: Ma ciascuna cosa presa particolarmente non è sempre abbastanza "buona", né "bella" abbastanza per farvela ravvisare.

Non ho potuto far di meno di rischiarare alcuni raziocinj di tali imprudenti ammiratori della Natura, dei quali potrebbesi valere l'Ateista al pari di loro. Io ho detto, che non dai piccioli dettagli della costruzion d'una pianta o d'un insetto, né da tali minute particelle staccate[12]*, di cui abbastanza non intendiamo i rapporti col tutto, dedur si dovea la Potenza, e la Saggezza del Creatore; ma bensì da i fenomeni, la semplicità, ed universalità de' quali non ammettono alcuna eccezione, né lasciano il campo ad equivoco alcuno.*

Nel mentre, che con tal discorso io feriva orecchie superstiziose, e che si temea, che da me si volessero annullare tutte le prove dell'Esistenza di Dio, alcuni credevano, che produr volessi per una geometrica dimostrazione quella, che deducevo dal mio stesso principio. Io caderei in qualche maniera nel fallo medesimo, che riprendo, se dessi a questa prova un genere di forza, che avere non puote.

Le dimostrazioni Geometriche, per quanto evidenti sien'esse, non sono le più opportune a convincere tutti gli spiriti. La maggior parte sarebbe meglio persuasa da un gran numero di probabilità, che da una prova, la cui forza dipende dall'estrema precisione. Così la Provvidenza non ha soggettate a quest'ultimo genere di prove sennonché alcune verità, le quali ci erano in qualche maniera indifferenti, nel tempo stesso, che ella ci ha somministrate le probabilità per farci conoscere quelle, che ci erano vantaggiose. E non bisogna credere, che la sicurezza, che si acquista in questa ultima maniera sia inferiore a quella, che si acquista nell'altra: Un numero infinito di probabilità diviene una dimostrazione completa, e per lo Spirito umano la più forte di tutte.

La Natura somministra con abbondanza questo genere di prove, e lo somministra per gradazione secondo la differenza dei spiriti. Tutte non hanno la medesima forza, ma tutte prese insieme, sono più che sufficienti a convincerne. Si vuol fare una scelta? Si conosce meglio il grado di chiarezza, che appartiene a quelle, che restano: Si spinge più avanti il rigore? Il numero delle prove scema ancora di più, e la loro luce diventa anche più pura. Così accade, che, malgrado alcune parti dell'Universo, nelle quali si scoprono tutto l'ordine, e tutta la coerenza, il tutto ce ne presenta abbastanza, perché dubitar non si possa dell'Esistenza d'un Creatore Onnipotente, e Sapientissimo: Così, per coloro, i quali volessero tor via dal numero delle prove quelle, che sembrar possono equivoche,

del 1751 dei "Dialoghi Astronomici" scritti da G. Harris).

[9] Maupertuis, al pari di Voltaire, era fondamentalmente un *Newtoniano*.

[10] Per ulteriori considerazioni, si rimanda al conciso ma interessante articolo di G. Israel [2], o alla più estesa trattazione data nel Cap. 5 (pag. 254 e segg.) del testo di Dugas, [3].

[11] In *corsivo* presentiamo il testo originale, da pag. 25 di [1] e segg.

[12] Un chiaro riferimento alle correnti *atomistiche*, legate all'Epicureismo e alla diffusione del *De Rerum Natura* di Lucrezio, di cui uno dei massimi promotori francesi fu Gassendi.

il numero, che loro ne resta, è più che sufficiente, onde convincerli. Così finalmente il Filosofo, che cerca questa verità nelle leggi più universali della Natura, più distintamente in esse la vede.

Ecco ciò, che io aveva da dire sull'Esistenza di Dio, che noi ritraggiamo dalla contemplazione dell'Universo. E pensando su questa importante Verità nella maniera, ch'io penso, sarei molto sfortunato se espresso mi fossi in maniera, onde far nascere qualche dubbio.

Parliamo adesso di quel principio da me tenuto per uno de' più forti argomenti, che l'Universo ci offerisce, onde farci ravvisare la Saggezza, e la Potenza dell'Autor nostro Sovrano[13]. *Questo è un*[14] *principio Metafisico sul quale sono stabilite le leggi tutte del moto, ed è, che : alloraquando "accade qualche cambiamento nella Natura, la quantità d'azione impiegata in tal cangiamento è sempre la meno, che si rende possibile"; l'azione essendo il prodotto della massa del corpo moltiplicata per la sua velocità, e per lo spazio, che esso trascorre*[15].

Avevo io dato fuori questo principio in una memoria letta a dì 15 Aprile 1744 nella Assemblea pubblica della Real Accademia delle Scienze di Parigi, ed è inserita negli atti della medesima. Verso la fine dell'anno stesso comparve alla luce un'opera eccellente del signor Eulero[16]*, il quale dimostra nel supplemento annessovi: "che nelle curve descritte dai corpi con le forze centrali, la velocità del corpo moltiplicata per picciolo arco della curva forma sempre un MINIMUM". Questa scoperta tanto maggior diletto arrecommi quantoché era essa una delle più belle applicazioni del mio principio al moto de' Pianeti, del quale era in effetto la regola.*

I non instrutti abbastanza in queste materie, crederono, che io non facessi altro che rinnovare l'antico assioma[17]*: "Che la Natura opera sempre colle mire più semplici". Ma quest'assioma, il quale non sussiste sennon dopoché sono di già provate l'Esistenza, e la Provvidenza di Dio, è così vago, che niuno ha sinora saputo dire in che cosa consista.*

Si trattava di trarre tutte le leggi della comunicazione del moto da un solo principio[18]*, o di trovar solamente un principio unico, col quale si accordassero tutte tai leggi, ed i maggiori Filosofi aveano l'uno, e l'altro tentato.*

Cartesio vi si ingannò, e ciò basta a conoscere la difficoltà dell'impegno. Egli credé "che la stessa quantità di moto si conservasse maisempre nella Natura"[19]*: prendendo pel moto il prodotto della massa moltiplicato per la velocità*[20]*: che all'incontro di differenti parti della materia, la modificazione del moto era tale, che le masse,*

[13] Per completezza, riportiamo in questa *Nota* anche la versione nell'originale francese, data alle pagg. XIX e XX dell'*"Avertissement"* nella prima edizione [10] del "Essay de Cosmologie" del 1751: *"... j'ai découvert un principe métaphysique sur lequel toutes les lois du mouvement & du repos sont fondées. J'ai fait voir la conformité de ce principe avec la puissance & la sagesse du créateur & de l'ordonnateur des choses. Ce principe est que dans toutes les distributions de mouvements qui se sont dans la nature, la quantité d'action (qui est la somme des produits des masses par les espaces qu'elles parcourent, & par les vvitesses avec lesquelles elles les parcourent) étoit toujours la plus petite qu'il fut possible: que dans le repos, les corps qui se tenoient en équilibre devoient etre places de maniere que s'il y arrivoit quelque petit mouvement, la quantité d'action fut la moindre. Ce principe est absolument nouveau, ou du moins l'étoit avant que je l'eusse proposé pour en déduire toutes les regles de la dioptrique"*.

[14] In questo punto il traduttore inserisce la seguente *Nota*, che riportiamo integralmente: "Questo principio metafisico della materia apparisce noto anche agli antichi Filosofi, scrivendo Democrito *"Atomi illae* (sua primitiva materia) *sive prima corpora, assidue in infinito inane moventur..."* de rebus natur. sec. 11. Arist. de coelo. 111.4. Cic. de fin. 1.6.

[15] Ricordiamo che la corretta definizione dell'*azione*, nel linguaggio moderno [4], è la seguente: $S = \int L\, dt$, essendo L la *Lagrangiana* del sistema, definita classicamente come la differenza tra l'energia cinetica T $(= \frac{1}{2}mv^2)$ e l'energia potenziale U. Secondo la definizione originaria di Maupertuis, invece, l'Azione sarebbe definita come: $S = m\, v\, s$, essendo s lo spazio percorso dal corpo di massa m (alla velocità v). Naturalmente, per un generico moto *vario*, l'espressione corretta andrebbe scritta come: $S = \int\, m\, v(s)\, ds$.

[16] Trattasi del *"Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes"*, Losanna, 1744.

[17] Presumibilmente identificabile con ciò che è oggi noto come il "Rasoio di Ockham".

[18] Ci si riferisce qui al fenomeno del *trasferimento del moto* da un corpo ad un altro, durante il loro urto.

[19] Cartesio discusse in dettaglio il suo Principio di "Conservazione della Quantità di Moto" nei suoi *Principia Philosophiae* [6] del 1644, sottolineandone, come fece poi lo stesso Maupertuis col suo *Principio di Minima Azione*, gli aspetti metafisici: *"Dio nella sua Onnipotenza ha creato la materia insieme al moto e alla quiete delle sue parti, e con la sua azione quotidiana, Egli mantiene le stesse quantità di moto e di quiete nell'Universo che Lui stesso aveva fornito all'Atto della Creazione"*. Il testo originale cartesiano, contenuto nel §XLII della Prima Edizione [6], a pag. 58, è il seguente: *"Demonstratur etiam pars altera, ex immutabilitate operationis Dei, mundum eadem actione, qua olim creavit, continuo jam conservantis"*, la cui traduzione letterale (da: R. Descartes, Opere 1637-1649, Milano, Bompiani, 2012, pag. 1815) è la seguente: "Si dimostra anche l'altra parte in base all'immutabilità dell'operazione di Dio, che ora conserva continuativamente il mondo con la medesima azione con la quale una volta l'ha creato".

[20] Questa è ancora oggi la corretta definizione della *Quantità di Moto*, ma sappiamo che questa si conserva solo per sistemi (nel caso specifico, negli *urti*) "isolati", ovvero nel caso in cui sia nulla la risultante delle forze esterne agente su di essi; ed in ogni caso si

moltiplicate ciascuna per la sua velocità, formavano, dopo l'urto, la stessa somma di prima. Da ciò deducea egli le sue leggi del moto: L'esperienza peraltro né lo smentì, perché il principio non era vero.

S'ingannò pure Leibnizio, e benché fossero di già scoperte le vere leggi del moto, ne produsse[21] *delle false nullamen di Cartesio. Avendo riconosciuto il suo errore, adottò un nuovo principio: cioè, "che nella Natura la forza viva si conserva sempre la stessa"*[22]*; intendendo per forza viva il prodotto della massa moltiplicato pel quarto* [sic !] *della velocità*[23]*; che alloraquando i corpi venivano ad incontrarsi, la modificazione del moto era tale, che la somma delle masse, moltiplicate ciascuna pel 4* [sic !] *della sua velocità, restava, dopo l'urto, la stessa, che era in avanti*[24]*. Questo Teorema era piuttosto un seguito di alcune leggi del moto, che il principio di esse. Huygens, che l'aveva scoperto, non avealo giammai tenuto per un principio, e Leibnizio, il quale promise sempre di stabilirlo a "Priori", non lo ha fatto giammai. In fatti la conservazione della forza viva ha luogo* [come già precisato!] *nell'urto de' corpi elastici, ma non in quello de' corpi duri*[25]*, e non solamente non si saprebbero dedurre le leggi di tali corpi, ma anzi quelle seguitate da questi corpi smentiscono una tale conservazione. Alloraquando fu ciò ai Leibniziani obbiettato, eglino vollero piuttosto asserire, "che non si davano corpi duri in Natura", che abbandonare il loro principio. Ciò era trovarsi ridotti al paradosso più strano, a cui abbia potuto condur giammai l'amor d'un sistema, poiché i corpi primitivi, i corpi, i quali sono gli elementi di tutti gli altri, possono essi essere, che corpi duri?*

Invano dunque finora i Filosofi hanno cercato il Principio Universale delle leggi del moto in una forza inalterabile, in una quantità, che si conservasse sempre la stessa in tutte le collisioni de' corpi, perché alcuna non ve ne è, che sia tale. Invano Cartesio s'immaginò un Mondo, che potesse non aver d'uopo della mano del Creatore: Invano Leibnizio, con diverso principio, fece un simil progetto. Niuna forza, niuna quantità, che si possa prendere per causa nella distribuzione del moto, sussiste inalterabile. Ve ne è però una, la quale prodotta di nuovo, e per così dire creata ogn'istante, è sempre creata con la maggiore possibile economia. Da ciò l'Universo fa conoscere la dipendenza, ed il bisogno che egli ha della Ubiquità del suo Autore, e fa ravvisare, che questi è Saggio altrettanto quanto è egli Potente[26]*. Questa forza altro non è, che ciò, che noi chiamammo l'azione, e da questo principio abbiamo dedotte le leggi tutte del moto così dei corpi elastici, come dei duri*[27]*.*

Sempre ho io conservata per Leibnizio la più distinta venerazione, e in tutti gl'incontri, che ho avuti di parlare d'un così illustre Soggetto ne ho fatte vedere le più autentiche prove, ma dalle sue opinioni, in questo, non posso a meno di allontanarmi. Trovando le mie idee così chiare, ed anche più chiare sulla natura de' corpi duri[28]*, che su quella de' corpi elastici* [*i.e.,* urti elastici]*, e trovando un principio, che adattavasi ugualmente ai moti degli uni, e degli altri, "io non proscrissi l'esistenza de' corpi duri". Vedendo che la forza viva* [*i.e.,* l'energia cinetica] *non si conservava nella collisione di tutti i corpi* [*i.e.,* nel caso degli urti anelastici]*, io dissi, "che la conservazione della forza viva non era il principio universale del moto". Finalmente non trovando più cosa alcuna, che mi obbligasse a credere, che la Natura non proceda giammai, che con passi insensibili, "osai della legge di continuità dubitare".*

Subito io vidi scagliarsi contra di me tutti i settarj lasciati dal Signor Leibnizio in Germania; setta tanto più

tratta piuttosto di una *conseguenza* delle leggi del moto, piuttosto che di un suo *principio*.

[21] Nel suo saggio *"Theoria motus abstracti, seu rationes motuum universales"*, del 1671.

[22] In realtà, Leibniz deve condividere la paternità di questa *ipotesi* col filosofo olandese C. Huygens, a cui si deve anche l'introduzione stessa del concetto di "Forza Viva".

[23] Come già detto, la "Forza Viva", può essere identificata con la moderna *Energia Cinetica*, definita come $T = \frac{1}{2} m\, v^2$. Il Principio di Leibniz sarebbe quindi associabile al ben noto "Teorema delle forze vive" (detto anche "Teorema dell'Energia Cinetica"), secondo il quale il Lavoro totale compiuto dalle Forze esterne su un sistema meccanico è sempre uguale alla variazione della sua Energia Cinetica; potremmo altresì identificare lo stesso *Principio* con quello della *Conservazione* della stessa *Energia Cinetica*, valido tuttavia solo se è nullo il lavoro delle Forze esterne, ovvero, nel caso degli urti *isolati*, solo se questi sono "elastici". Da ciò se ne deduce, come afferma lo stesso Maupertuis, che pure questo *Principio Leibniziano* non ha carattere generale, e non può quindi essere considerato come una "Legge Universale del Moto", in sostituzione delle leggi di Newton.

[24] Come già detto, ciò è vero solo se l'urto è di tipo *elastico*.

[25] In realtà, nel caso di urti *anelastici*.

[26] Di nuovo, emergono gli aspetti metafisici, per non dire *Teleologici*, nell'interpretazione di Maupertuis del proprio Principio (di Minima Azione).

[27] Ed in effetti, come sappiamo, il Principio di Minima Azione è davvero il Principio Universale attraverso il quale dedurre le leggi che descrivono l'evoluzione dinamica di un qualsiasi sistema fisico, meccanico e non.

[28] Volendosi presumibilmente riferire al caso dei generici urti *anelastici*.

attaccata al culto della sua Divinità[29] *quanto meno spesse volte ne comprende gli oracoli*[30]. *Sembra incredibile, ma pure egli è vero, che nel mentre, che alcuni mi trattavano come un temerario, il quale ardiva nutrire sentimenti opposti a quelli di Leibnizio, altri voleano far credere, che io prendesse da lui medesimo le cose al suo sistema più opposte. Fin dove non possono trasportare un culto cieco, e lo spirito di partito!*

Il testo di Maupertuis prosegue poi (da pag. 33 in [1]) fino al termine della *Prefazione* del "Saggio di Cosmologia" (pag. 39), discutendo sulla polemica col Sig. Koenig, uno dei *leibniziani*, e della sua risoluzione a proprio favore, anche grazie al contributo e testimonianza del Wolfio[31], altro filosofo illuminista, con marcati interessi fisici e matematici. Qui non riporteremo i dettagli di questa polemica.

3 Difficoltà del Sistema Cartesiano dei "Vortici" con le Leggi di Keplero

Nel suo "Discorso sulle diverse configurazioni delle STELLE"[32], incluso in traduzione italiana al termine del *Saggio di Cosmologia* [1], Maupertuis discute e analizza i vari Sistemi del Mondo in voga all'epoca. In particolare, nel §III (da pag. 142 di [1]), col titolo *"Sistema dei Vortici per ispiegare il moto de'Pianeti, e la gravitazione de' corpi verso la Terra"*, egli mostra come le leggi (empiricamente confermate) di Keplero che descrivono il moto dei Pianeti mettano in seria difficoltà il Sistema Cartesiano dei *Vortici.* Riportiamo qui di seguito, integralmente, quanto scritto in proposito dal Maupertuis, proponendo di nuovo (in *corsivo*) il testo dell'originale versione italiana [1], accompagnandolo con qualche breve commento e spiegazione:

Per ispiegare il moto de' Pianeti intorno il Sole, Cartesio[33] *li suppone immersi in un fluido, il quale circolando anch'esso intorno quest'Astro, forma il vasto vortice, nel quale sono portati, come un Vascello abbandonato alla corrente d'un fiume. Questa spiegazione molto semplice al primo colpo d'occhio, è soggetta, se si esamina, a molti inconvenienti.*

I Pianeti si movono intorno il Sole, ma ciò accade con certe circostanze, le quali non ci è più permesso ignorare.

Le strade, che tengono i Pianeti non sono circoli, ma ellipsi, delle quali il Sole occupa il mezzo[34]. *Una delle leggi della rivoluzione si è, che se si tirano da luogo d'onde un Pianeta è partito, e da quello, in che egli si trova attualmente, due linee dritte riducentesi al Sole, il campo del divisore elliptico formato da queste due linee, e dalla porzione dell'ellipse scorsa dal Pianeta, si accresce alla stessa proporzione del tempo, che scorre durante il moto del Pianeta.*[35]. *Da ciò proviene quell'accrescimento di velocità, che si osserva ne' Pianeti alloraquando essi al Sole si appressano: le dritte tirate dai luoghi del Pianeta sino al Sole sono allora più corte; affinché gli spazj* [in realtà, le aree] *descritti in un certo tempo sieno uguali agli spazj descritti nel tempo stesso, alloraquando il Pianeta era più discosto dal Sole, è necessario che gli archi elliptici scorsi dal Pianeta sieno più grandi.*

[Quando un Pianeta, ad una distanza r dal Sole, percorre in un tempo infinitesimo dt un arco di lunghezza ds, l'angolo *coperto* (rispetto al Sole) è dato da: $d\theta = ds/r$, mentre la corrispondente area *spazzata* dal Pianeta (essenzialmente un triangolo infinitesimo di base ds e altezza r) è: $dA = \frac{1}{2}\, r\, ds = \frac{1}{2}\, r^2\, d\theta$. Poiché il Momento Angolare, che è costante in virtù della centralità della forza di Gravitazione Universale[36] (essendo nullo il suo *momento*: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_G = \mathbf{r} \wedge \hat{\mathbf{r}}\, F_G(r) = 0$), è dato da:

[29] Ironicamente, si allude allo stesso Leibniz!
[30] Cioè, la sua stessa filosofia.
[31] Christian Wolff (1679-1754), filosofo e giurista tedesco.
[32] Vedi Nota 8.
[33] Questa trattazione è contenuta nella *Pars Tertia* dei suoi "Principia Philosophiae" del 1644 [6].
[34] In realtà, come preciserà a breve lo stesso Maupertuis, il Sole occupa uno dei due fuochi dell'ellisse.
[35] Si tratta della ben nota "Seconda Legge di Keplero" - detta anche *Legge delle aree* - secondo la quale, espressa in termini più moderni, un Pianeta, durante il suo moto attorno al Sole, *spazza* aree uguali in tempi uguali, il che equivale a dire che la "velocità areolare" che caratterizza il suo moto è costante. Questa Legge è una diretta conseguenza della *Conservazione del Momento Angolare* nel caso di forze centrali. Si veda per esempio, la trattazione data in [12].
[36] Seguendo quanto esposto in [12] a pag. 56.

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge m\,\mathbf{v} = m\mathbf{r} \wedge (\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{k}} \equiv 2\,m\,\frac{dA}{dt}\,, \tag{3}$$

possiamo dedurre che anche la stessa *velocità areolare* ($\dot{A} = \frac{dA}{dt}$) è costante, da cui segue direttamente l'enunciato della Seconda Legge di Keplero: "i Pianeti si muovono intorno al Sole, posto in uno dei due fuochi dell'ellisse, in modo da *spazzare* aree uguali in tempi uguali", ovvero, aree direttamente proporzionali agli intervalli di tempo considerati. Infine, questo stesso risultato implica anche che le velocità lineari dei Pianeti debbano essere inversamente proporzionali alla loro distanza dal Sole; infatti, essendo come si è visto $dA = \frac{1}{2}\,r\,ds$, troviamo che:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2\,\dot{A}}{r} = \frac{L_O}{m\,r} \sim \frac{1}{r}\,. \tag{4}$$

Dimostrato quanto detto, possiamo continuare con l'esposizione del testo di Maupertuis:]

Tutti i Pianeti a noi cogniti seguono questa legge; non solamente i principali [cioè, i Pianeti veri e propri]*, che fanno la loro rivoluzione intorno il Sole, ma anche i secondari, i quali la fanno intorno qualche altro Pianeta, come la Luna, ed i Satelliti di Giove, e di Saturno: Ma qui gli spazj* [cioè, le aree spazzate durante il moto]*, i quali sono proporzionali al tempo, sono gli spazj descritti intorno il Pianeta principale, che è, rispetto i suoi Satelliti, lo stesso che è il Sole rispetto i Pianeti del primo ordine. Da questa legge, l'orbita d'un Pianeta, ed il tempo della sua rivoluzione essendo conosciuti, si può in ogni tempo trovare il luogo dell'orbita, in cui si trova il Pianeta.*

Un'altra legge segna il rapporto tra la durata della rivoluzione di ciascun Pianeta, e la sua distanza dal Sole, e non è questa legge meno dell'altra esattamente osservata. Perché il tempo della rivoluzione di ciascun Pianeta è proporzionale alla radice quadra del cubo della sua mezzana distanza dal Sole.

[Si tratta evidentemente della "Terza Legge di Keplero", conseguenza dell'equilibrio tra la forza di Gravitazione Universale e la forza centrifuga[37]:

$$F_G = G_N\,\frac{m\,M}{r^2} = F_{cf} = m\,\omega^2\,r = m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,r\,, \tag{5}$$

(essendo $\omega = 2\pi/T$ la velocità angolare del Pianeta, e T il suo Periodo di rivoluzione intorno al Sole), da cui si ottiene direttamente:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G_N\,M}{4\,\pi^2} = \text{costante}, \tag{6}$$

che è appunto costante per tutti i pianeti (essendo M la massa del Sole). Prosegue quindi Maupertuis:]

Questa legge si estende anche ai Pianeti secondarj: osservando però, che in questo caso le rivoluzioni, e le distanze si debbono intendere rapporto al Pianeta principale, intorno di cui si raggirano gli altri. Con questa legge, la distanza de' due Pianeti dal Sole, ed il tempo della rivoluzione dell'uno essendo fissate, si può trovare il tempo della rivoluzione dell'altro; ovvero essendo così stabiliti il tempo della rivoluzione de' due Pianeti, e la distanza dell'uno di essi dal Sole, si può ricavare la distanza dell'altro[38].

Queste due leggi fissate[39]*, non si tratta più solamente di spiegare, perché in generale i Pianeti girino intorno il*

[37] Si veda, per esempio, in [12], alle pagg. 60 e 63.

[38] Ad esempio, sapendo che il Periodo di rivoluzione di Saturno è di circa 30 anni, se ne deduce che la sua distanza dal Sole è di poco più di nove volte maggiore di quella della Terra; si trova infatti: $r_{sat} = r_T\,\left(\frac{T_{sat}}{T_T}\right)^{2/3} \simeq \sqrt[3]{30^2}\,r_T \simeq 9.7\,r_T$.

[39] Cioè, la Seconda e la Terza Legge di Keplero.

Sole; bisogna anche spiegare perché osservino essi queste leggi, o almeno è necessario, che la spiegazione che si dà del loro moto non venga smentita da queste leggi.

Poiché le distanza de' Pianeti dal Sole sono differenti, come lo sono i tempi delle loro rivoluzioni, la materia de' vortici non è dappertutto della medesima densità, ed il tempo della sua rivoluzione non è lo stesso per tutto.

Dal descrivere che fa ciascun Pianeta intorno il Sole degli spazj [Aree] *proporzionali al tempo* [in conseguenza di quanto ottenuto in eq.(3)]*, ne segue, che la velocità degli strati o superficj della materia del vortice sono reciprocamente proporzionali alle distanze di tali strati dal centro* [concordemente col risultato (4)].

Ma dall'essere i tempi delle rivoluzioni de' differenti Pianeti proporzionali alle radici quadre delle cube delle loro distanze dal Sole [in virtù della (6)]*, ne viene, che le velocità degli strati sono reciprocamente proporzionali alle radici quadre delle loro distanze.*

[Infatti, poiché in virtù dell'eq.(6) si ha che $T \sim r^{3/2}$, si trova:

$$v_{strato} = \frac{2\pi\, r}{T} \sim \frac{r}{r^{3/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{r}}\,, \tag{7}$$

incompatibilmente col risultato ottenuto dalla Seconda Legge dato nell'eq.(4); ciò significa che la velocità dello strato del fluido che costituisce il *Vortice* non può essere la stessa del Pianeta che esso trascina!]

Se si vuole dunque assicurare una di queste leggi ai Pianeti, l'altra diviene necessariamente incompatibile. Se si vuole, che i strati del vortice abbiano le velocità necessarie, perché ciascun Pianeta descriva intorno il Sole degli spazj proporzionali al tempo [in modo tale quindi da rispettare la Seconda Legge di Keplero]*, ne seguirà, per esempio, che Saturno impieghi 90 anni nella sua rivoluzione, lo che è in tutto all'esperienza contrario.*

[In effetti, utilizzando l'eq.(4), ed essendo $v = \frac{2\pi r}{T}$, si trova che il Periodo di rivoluzione di un Pianeta è quadraticamente proporzionale alla sua distanza dal Sole, per cui, applicando ciò a Saturno e la Terra, si ottiene: $T_S = T_T \left(\frac{r_S}{r_T}\right)^2 \simeq T_T\, 9.5^2 \simeq 90$ anni.]

Se all'opposto si vuole conservare agli strati del vortice le necessarie velocità, perché i tempi delle rivoluzioni sieno proporzionali alle radici quadre delle cube delle distanze [così da rispettare questa volta la Terza Legge di Keplero]*; si vedrà gli spazj descritti intorno al Sole dai Pianeti non esser più proporzionali a' tempi.*

[Questo perché, dovendo la velocità soddisfare l'eq.(7), dalla (4) si ottiene:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\, r\, v \sim r\, \frac{1}{\sqrt{r}} \sim \sqrt{r}\,, \tag{8}$$

ovvero una velocità areolare non-costante. A questo punto il nostro Autore prosegue così:]

Io non parlo qui nulla affatto degli objetti contro i vortici, i quali non compariscono insuperabili. Non dico niente di quello, che Nevvtono[40] [Newton] *avea fatto, supponendo come fa Cartesio, che il vortice ricevesse il suo moto dal Sole, che girando sul proprio asse comunicasse questo moto di strato in strato sino a' confini del vortice.* Newton *avea cercate con le leggi della meccanica le velocità de' differenti strati del vortice, e le trovava molto diverse da quelle, che sono necessarie alla regola del "Keplero", che riguarda il rapporto trai i tempi periodici de' Pianeti, e le loro distanze dal Sole*[41]*. Monsieur "Bernoulli", nella bella dissertazione, che riportò il premio dell'Accademia nel 1730 ha fatto vedere, che* Newton *non avea fatto attenzione a qualche circostanza, che altera il computo. Egli è vero, che anche facendo quest'attenzione, non si trovano le velocità delli strati quali esse dovrebbero essere per l'osservanza di questa legge; ma di più vi si avvicinano.*

[40] Questo sarà l'unico nome riportato nel testo per il quale useremo la forma attuale, inglese, Newton, anziché quella originale, ottenuta italianizzandone la forma *latina*.

[41] Cioè, l'omonima Terza Legge.

Finalmente da qualsivoglia causa, che provenga il moto del vortice, si potrà bene accordare le sue velocità delli strati con una delle due leggi, giammai però con ambedue [come abbiamo esplicitamente dimostrato precedentemente.]. *Nondimeno di queste due leggi è tanto l'una quanto l'altra inviolabile.* [Ciò è sufficiente a rendere il "Modello Cartesiano dei Vortici" un modello del Mondo non-realistico.]

Gl' Intelletti più illuminati hanno cercato rimedj per questo. Leibnizio fu ridotto a dire che bisognava, che per tutta la "superficie", o strato in cui si trovava ciascun Pianeta vi fosse una circolazione, da lui chiamata Armonica, cioè, una certa legge di velocità opportuna a far seguitare a' Pianeti quella delle due leggi, che concerne la proporzione tra gli spazj, ed i tempi, e che era d'uopo nel tempo stesso, che per tutta quanta l'estensione del vortice si trovasse un'altra legge differente per far seguitare a' Pianeti la legge concernente la proporzione tra i loro tempi periodici, e le loro distanze dal Sole. Ecco quanto ha potuto dire uno de' più grandi Uomini del secolo per difesa dei vortici[42].

M. Bulfingero[43]*, nella dissertazione, che riportò il premio nel 1728 riconosce, ed anche meglio dimostra la necessità di queste differenti leggi nel fluido, che strascina i Pianeti. Ma non è facile ammettere queste differenti superficj sferiche moventesi con velocità indipendenti, ed interrotte.*

Vi è anche contro questo sistema una altra obbiezione, che non è molto men forte. I diversi strati, o letti de' vortici, hanno presso a poco le stesse densità de' Pianeti da loro portati, poiché ciascun Pianeta si sostiene in quello dove si trova, e queste si movono con velocità molto rapide. Nondimeno noi vediamo le Comete attraversare questi strati, o letti senza ricevere alterazione sensibile nel loro moto. Le Comete medesime sarebbero anche apparentemente strascinate da fluidi, i quali circolerebbero attraverso i fluidi che portano i Pianeti senza confondere, né alterare il lor corso!

[A questo punto Maupertuis discute come la "Gravitazione" possa essere spiegata nel contesto del Modello Cartesiano dei Vortici:]

Passiamo ad ispiegare la gravitazione nel sistema de' Vortici. Tutti i corpi caggiono, e se non son trattenuti, tendono ad avvicinarsi al centro della Terra.

Cartesio, per ispiegare questo fenomeno, suppone un vortice di una materia fluida, il quale circola estremamente veloce intorno la Terra nella direzione dell'Equatore. Si sa, che alloraquando un corpo descrive un circolo, tende ad allontanarsi dal centro: tutte le parti di questo fluido hanno dunque, una per una, questa forza centrifuga, che tende ad allontanarle dal centro del circolo, che esse descrivono. Se dunque esse allora incontrano qualche corpo, il quale o non abbia, od abbia minore questa forza centrifuga, bisognerà, che egli ceda al loro sforzo, e le parti del fluido avendo sempre più forza centrifuga, che i corpi, occuperanno successivamente il suo luogo, finché esse lo abbiano cacciato persino al centro. [Teoria dell'attrazione gravitazionale alquanto fantasiosa, oltreché palesemente errata; come è noto l'accelerazione causata dalla forza centrifuga dipende solo dalla distanza del corpo dal centro e dalla sua velocità (tangenziale): $a_c = v^2/r$, per cui, a meno di ipotizzare velocità assolutamente diverse tra il fluido e il Pianeta da esso trascinato, il che distruggerebbe però il modello e la motivazione stessa dei vortici, la spiegazione suggerita da Cartesio è da considerarsi assolutamente sbagliata !]

Questa generale spiegazione della gravitazione si trova esposta a difficoltà anche maggiori, delle quali non riporteremo che le principali, che sono d'Ugenio[44].

Questo grand'Uomo obbiettò:

- *Che se il moto di un simil vortice fosse bastantemente rapido, onde spingere i corpi verso il centro con tanta forza, dovrebbe far provare a' medesimi qualche impulsione orizzontale, o piuttosto strascinar tutto nel verso della sua direzione.*

[42] Qui Maupertuis non manca certo di una sottile ironìa, conseguenza anche delle intense polemiche che aveva avuto in passato con lo stesso Leibniz.

[43] Georg Bernhard Bulfinger (1693-1750), fu un filosofo tedesco di scuola *Wolffiana*, professore a San Pietroburgo e Tubinga.

[44] Nome italianizzato dal latino del famoso fisico-matematico olandese Christiaan Huygens (1629-1695), uno dei maggiori scienziati del XVII secolo.

- *Che attribuendo la causa della gravitazione a un vortice, il quale si move parallelamente all'Equatore, i corpi non sarebbero spinti verso il centro della Terra, ma dovrebbero cadere in piani perpendicolari all'asse. La caduta de' corpi essendo effetto della forza centrifuga della materia del vortice, e tendendo tal forza ad allontanare questa materia dal centro di ciascun circolo, che essa descrive, dovrebbe in ogni parte spingere i corpi verso il centro di questo circolo; ed i corpi in vece di tendere verso il centro della Terra, tenderebbono verso i centri di ciascun circolo parallelo all'Equatore.*

Ora né l'uno né l'altro succede di questi due effetti. Si osserva pertutto, che la tendenza de' corpi non è accompagnata da alcuna deviazione, e che i corpi gravitano perpendicolarmente alla superficie della Terra.

Vediamo i rimedj, che Ugenio porta agl'inconvenienti, che egli trova nel sistema di Cartesio. Invece di far movere la materia eterea tutta insieme intorno i medesimi Poli, suppone egli, che essa movasi per ogni verso nello spazio sferico, che la contiene. Questi moti opponendosi gli uni agli altri fintantoché sieno divenuti circolari, la materia eterea verrà finalmente a moversi in superficj sferitiche per tutte le direzioni.

Questa ipotesi stabilita libera il vortice da due obbjezioni, che gli erano fatte. 1: La materia eterea, che cagiona la gravitazione, circolando per tutti i versi, non dee strascinare i corpi orizzontalmente come i vortici di Cartesio, perché l'impulsione orizzontale, che essi ricevono da ogni filetto di questa materia, è distrutta da un impulsione contraria. 2: Si vede che i corpi debbono gravitare, o tendere verso il centro della Terra, perché la materia eterea, che circola in ogni superficie sferica, spingendoli verso l'asse di questa superficie, essi debbono tendere verso l'intersezione di tutti questi assi, che è il centro della Terra.

Questo sistema dunque soddisfa meglio a' fenomeni della gravitazione, che non fa quello di Cartesio; ma bisogna anche confessare, che esso è molto lontano dalla sua semplicità. Non è facile concepire questi moti circolari della materia eterea per tutte le direzioni: e que' medesimi, che tutto vogliono spiegare con l'impulsione della materia eterea, non sono stati contenti di ciò, che Ugenio ha fatto per sostenerla.

M. Bulfingero non potendo ammettere questo moto per ogni verso, ha proposto un terzo sistema. Egli pretende, che la materia eterea si mova nel medesimo tempo intorno de' due assi perpendicolari l'uno all'altro: ma benché un simil moto sia di già molto difficile a concepire, egli suppone anche due novi moti nella materia eterea opposti a' primi due. Ecco dunque quattro vortici opposti due a due, i quali si attraversano senza distruggersi.

Così nel sistema de' vortici è resa ragione de' due principali fenomeni della Natura. Che una materia fluida, che circola, strascini i Pianeti intorno il sole; che nel vortice particolare di ciascun Pianeta, un moto consimile di materia spinga i corpi verso il centro: sono queste idee, che molto naturalmente si presentano allo spirito.

Ma la Natura meglio esaminata non permette di starsene a queste prime apparenze. Quelli, che vogliono internarsi in qualche dettaglio sono obbligati ad ammettere nel vortice solare l'interruzione de' moti delle differenti superficj, di cui abbiamo parlato; e nel vortice terrestre tutti i moti differenti, gli uni opposti agli altri, della materia eterea. Con tai dispiacevoli condizioni, si possono spiegare i fenomeni per mezzo de' vortici.

Questo imbarazzo fece dire all'Autore[45] *da noi già citato, che, malgrado tutto ciò, che egli faceva per difendere i vortici, quelli, che ricusavano di ammetterli si confermerebbero forse nel loro rifiuto a cagione della maniera, ond'esso li difendeva.*

Bisogna confessare che sin qui non è stato possibile accordare, in modo che appaghi, i vortici con i fenomeni. Per questo però non si ha diritto di dedurne l'impossibilità. Non vi è cosa più bella dell'idea di Cartesio, il quale voleva, che tutto si spiegasse in Fisica per via della materia, e del moto; ma se si vuol mantenere a quest'idea la sua bellezza non bisogna farsi lecito di supporre delle materie, e de' moti senz'altra ragione, che il bisogno, che se ne ha.

[Nel successivo §IV del suo *"Discorso sulle diverse configurazioni delle Stelle"*, col titolo "Sistema dell'Attrazione, per ispiegare gli stessi fenomeni", Maupertuis rivela più o meno esplicitamente il suo favore nei confronti del

[45] M. Bulfingero.

sistema Newtoniano e della relativa Teoria della Gravitazione Universale. In questa sede non ci occuperemo né di questo né dei rimanenti §§ del *"Discorso"*, che forse potranno essere argomento di uno studio successivo.]

4 Applicazione del Principio di Maupertuis alla rifrazione della luce

Nel 1744 Maupertuis propose il suo celebre Principio, generalizzando le tecniche utilizzate nello studio della rifrazione della luce, con cui era stato in grado di riprodurre gli stessi risultati di Cartesio, ma ottenuti basandosi su princìpi diversi. Come già datto nel §1, il loro risultato (eq.(1)) era sbagliato, potendo accordarsi con la legge empirica corretta di Snell (eq.(2)) solo assumendo, erroneamente, che la luce si propagasse più velocemente nei mezzi più densi, anziché in quelli più rarefatti[46], come invece assunto - correttamente - da Fermat.

Presentiamo qui, in una versione leggermente più *attuale*, l'applicazione del Principio di Maupertuis allo studio della rifrazione della luce, riferendosi alla Fig. 1.

Nel semispazio $y > 0$ sia contenuto un mezzo (che, senza perdita di generalità, potremo sempre assumere essere il meno denso) nel quale la velocità della luce è v_1, mentre per $y < 0$ sia presente un mezzo diverso (il più denso), in cui tale velocità è v_2. Il piano $y = 0$ costituisce la superficie di separazione tra i due mezzi. Fissati due punti generici, A e B, rispettivamente nel primo e nel secondo mezzo, ci chiediamo - concordemente con quanto richiesto dal Principio di Maupertuis - per quale particolare percorso l'*Azione* corrispondente alla propagazione della luce tra questi due punti è la minima possibile. Si scelga come asse x l'intersezione tra il piano nel quale avviene la propagazione della luce (contenente pertanto sia i due punti A e B, che il punto C sulla superficie di separazione in cui incidono i due raggi rettilinei propagantesi nei due mezzi) e la stessa superficie di separazione. Dette quindi y_A e y_B le generiche distanze dei due punti dalla superficie di separazione, e $d = |x_A - x_B|$ la proiezione della loro reciproca distanza sulla stessa superficie (asse x), possiamo fissare il sistema di coordinate come in Fig. 1, cosicché $A(0, y_A)$ e $B(d, -y_B)$, ed il problema si riduce quindi alla ricerca del punto $C(x_C, 0)$ dove inciderà il raggio di luce proveniente da A, prima di proseguire, sempre rettilineamente, verso B.

Essendo l'Azione per Maupertuis definita come somma dei prodotti delle masse per le velocità e per le lunghezze degli spazi percorsi (l_1 e l_2), nel caso in esame potremo esprimere il "Principio di Minima Azione" come la seguente condizione:

$$S = v_1\, l_1 + v_2\, l_2 = \text{minimo}, \tag{9}$$

(avendo semplificato la massa m) ovvero, esprimendo l_1 ed l_2 in termini dell'unica variabile incognita x_C:

$$S = v_1 \sqrt{{y_A}^2 + {x_C}^2} + v_2 \sqrt{{y_B}^2 + (d - x_C)^2} = \text{minimo}. \tag{10}$$

La richiesta di *minimo* può essere soddisfatta imponendo che la derivata prima di questa espressione rispetto a x_C sia nulla; si trova quindi:

$$v_1 \frac{x_C}{\sqrt{{y_A}^2 + {x_C}^2}} - v_2 \frac{d - x_C}{\sqrt{{y_B}^2 + (d - x_C)^2}} = 0\,, \tag{11}$$

ovvero, introducendo i cosiddetti angoli di *incidenza* θ_1 e di *rifrazione* θ_2:

$$v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_2}{v_1}\,. \tag{12}$$

[46]errore commesso anche dallo stesso Newton!

Questo risultato, lo stesso ottenuto da Cartesio, si riduce però alla corretta "Legge di Snell" data nell'eq.(2) solo nell'ipotesi - sbagliata! - che $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$. Nel prossimo §5 vedremo invece quale fu la soluzione (*corretta*) di Fermat.

5 Applicazione del Principio di Fermat alla rifrazione della luce

All'inizio dell'anno 1662, in una lettera indirizzata a C. de la Chambre, Fermat denunciò l'errore commesso da Cartesio, denunciando il fatto che allo scopo di riprodurre il risultato empiricamente corretto costituito dalla Legge di Snell, Cartesio aveva dovuto assumere l'ipotesi fisicamente poco plausibile di una maggior velocità della luce nei mezzi più densi. Nel contempo, Fermat proponeva una propria spiegazione applicando una sorta di "principio di *economia*" della Natura, principio che egli stesso nella lettera giudica *comune* e *ben consolidato*. Secondo tale principio *"la Natura agisce sempre nei modi più brevi"*. Come si è ripetutamente detto, ciò sarà di ispirazione per Maupertuis, che se ne servì per dedurre il suo *Principio di Minima Azione*. Tuttavia, come si è visto nel precedente §4, la richiesta di minimizzazione dell'Azione (definita come $S = mv\,l$) porta in questo caso ad un risultato errato, mantenendo l'ipotesi corretta (dello stesso Fermat) di una velocità della luce minore nei mezzi più densi. Fermat riuscì a dimostrare che il corretto risultato può comunque essere ottenuto imponendo che *sia il tempo trascorso durante la rifrazione a dover essere il minimo possibile*. Vediamone la dimostrazione in dettaglio (di nuovo riferendoci alla Fig. 1, e a quanto già detto nel §4 per la scelta del sistema di coordinate). Si tratta di nuovo di dover determinare le coordinate del punto C (cioè x_C) in cui incidono i raggi rettilinei che si propagano nei due mezzi: AC nel primo mezzo e CB nel secondo. Trattandosi di due spazi percorsi alle velocità costanti v_1 (nel primo mezzo, assunto, lo ricordiamo, il meno denso) e v_2 (nel secondo, più denso, ove la luce è più *lenta*), possiamo esprimere il tempo *totale* trascorso durante l'intero tragitto da A a B, che deve essere il *minimo* possibile, in funzione della *variabile* x_C come:

$$t = t_{AC} + t_{CB} = \frac{l_{AC}}{v_1} + \frac{l_{CB}}{v_2} = \frac{\sqrt{{y_A}^2 + {x_C}^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{{y_B}^2 + (d - x_C)^2}}{v_2} = \text{minimo.} \tag{13}$$

Per ottenere x_C che corrisponda a questo minimo del tempo trascorso è sufficiente imporre di nuovo che la derivata di questa funzione rispetto alla variabile x_C sia nulla:

$$\frac{d\,t}{d\,x_C} = \frac{x_C}{v_1\,\sqrt{{y_A}^2 + {x_C}^2}} - \frac{d - x_C}{v_2\,\sqrt{{y_B}^2 + (d - x_C)^2}} = 0\,, \tag{14}$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}\,, \tag{15}$$

che difatti, nella giusta ipotesi di una maggior velocità della luce nel mezzo più denso[47] (cosicché $v_1/v_2 = n_2/n_1 \geq 1$), è proprio la *corretta* "Legge di Snell".

[47] Ricordiamo di nuovo che l'indice di rifrazione di un mezzo è proprio uguale al rapporto tra la velocità della luce nel vuoto, $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s, e l'effettiva sua velocità nel mezzo stesso: $n = c/v$.

References

[1] P. L. M. Maupertuis, *"Saggio di cosmologia del Signore di Maupertuis, Presidente della Reale Accademia di Berlino, col di lui Discorso sulle diverse configurazioni delle Stelle". Tradotti, e con note illustrati dal Co: Orazio degli Arrighi Landini*, Venezia, 1768.

[2] Giorgio Israel, *Il principio di minima azione e il finalismo in meccanica* , "Le Scienze", n. 346, giugno 1997, pag. 70.

[3] René Dugas, *A History of Mechanics* , New York, Dover Publ., 1988.

[4] V. I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica* , Roma, Editori Riuniti, 1992; L. D. Landau e E. Lifsits, *Meccanica*, Roma, Editori Riuniti, 1976; H. Goldstein, *Meccanica Classica*, Bologna, Zanichelli, 1971.

[5] Isaac Newton, *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* , Londra, 1687.

[6] René Des-Cartes, *"Principia Philosophiae"*, Amsterdam, 1644.

[7] G. W. Leibniz, *Theoria motus abstracti: seu rationes motuum universales, à sensu & phaenomenis independentes*, 1671.

[8] L. E. Lesgolts, *Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni*, Roma, Editori Riuniti, 1981.

[9] P. L. M. Maupertuis, *"Accord de differentes Loix de la Nature aui avoient jusqu'ici paru incompatibles"*,Hist. Acad. Roy. Sci. [de Paris], Mem. Math. Phy., 1744 [*publ.* 1748].

[10] P. L. M. Maupertuis, *"Essai de Cosmologie"*, s.l., 1751.

[11] P. L. M. Maupertuis, *"Trattato della Gravità, in cui si cerca di spiegare i principali fenomeni del cielo, ed in particolare le differenti figure degli astri, del Signor di Maupertuis", Tradotto dal Francese*; (a cui fa seguito anche la *"Lettera sulle comete"* dello stesso autore), Napoli, 1778.

[12] Stefano Ranfone, *Complementi di Fisica*, Pisa, ETS, 2016.

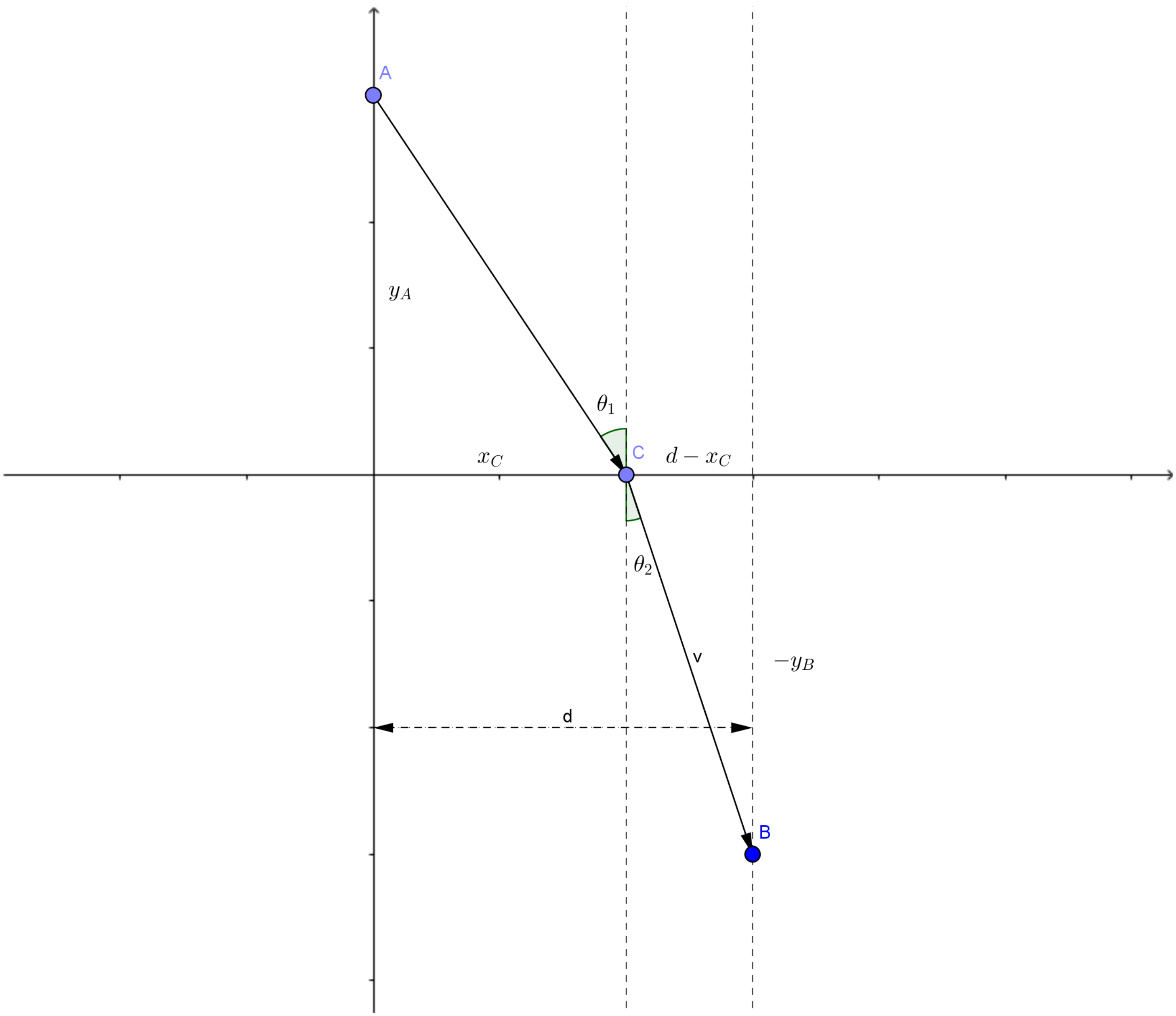

Fig. 1