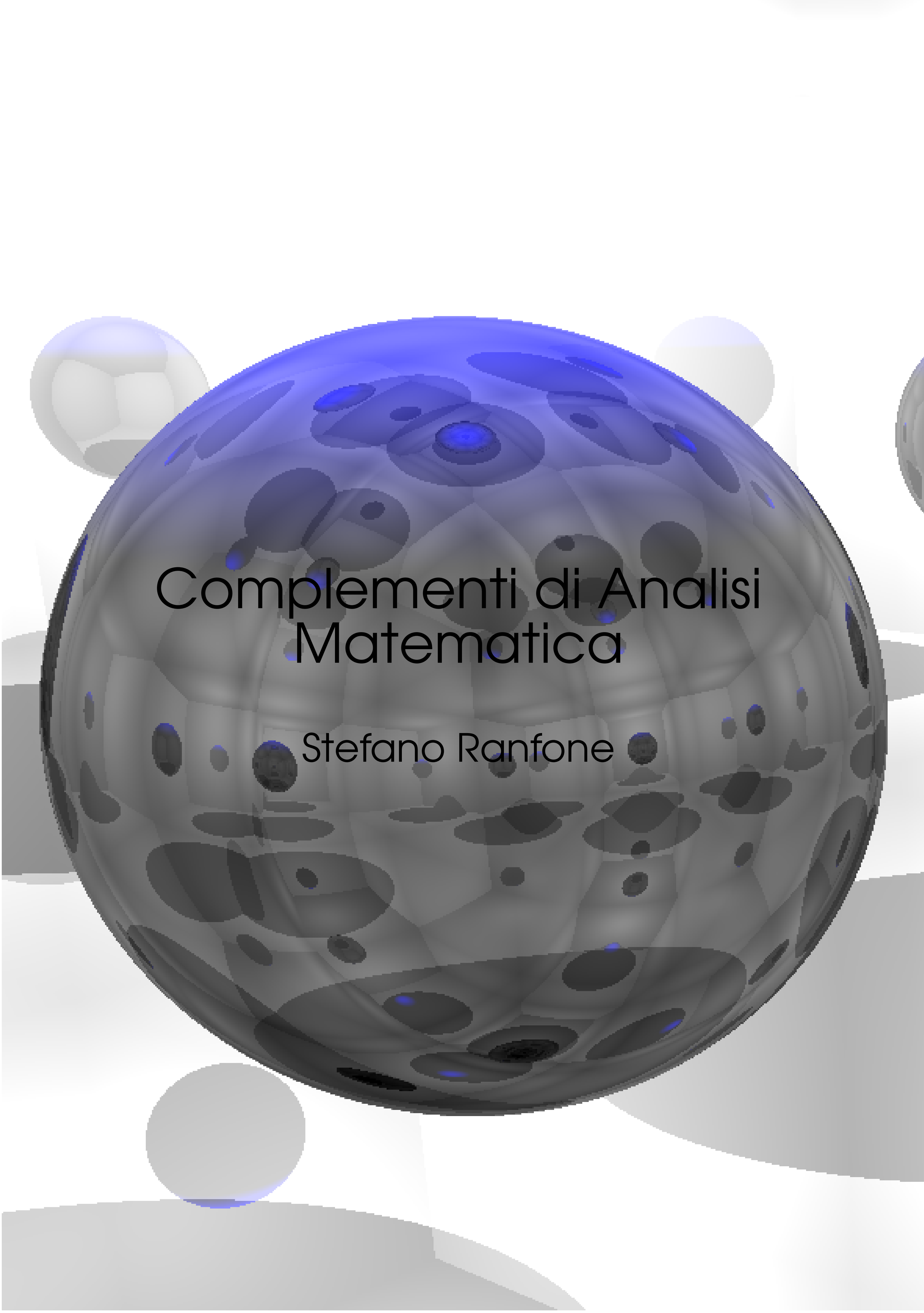


Complementi di Analisi Matematica

Stefano Ranfone

SRANFONE@ALICE.IT; URL: WWW.STEFANO-RANFONE.IT

Contents

0.1 Prefazione

Queste *Dispense* vogliono fornire agli studenti del Triennio del Liceo Scientifico un breve compendio di "Analisi Matematica". Compendio che può essere utile per poter affrontare adeguatamente alcuni degli argomenti chiave del Corso di Fisica, come la *Meccanica* (al Terzo anno) e l'*Elettromagnetismo* (al Quinto), con almeno una conoscenza minimale degli strumenti di calcolo, come le "Derivate" e gli "integrali"; tutti argomenti poi trattati in modo più esteso e completo all'interno del Corso standard di Matematica che viene svolto durante l'ultimo anno di corso. Si è anche voluto dedicare l'ultima parte ad una trattazione introduttiva delle "Equazioni Differenziali", anche in vista delle annunciate novità che sembra possano esserci con la Riforma dell'Esame di Stato. In effetti, si ritiene che quanto qui presentato, possa essere utilizzato dagli studenti anche in fase di ripasso, proprio in vista dell'Esame finale.

Si desidera infine ringraziare la collega, Prof.ssa Angela Castellacci, per gli utili suggerimenti.

1. Lo Studio di Funzione

1.1 Funzioni reali di una variabile: Introduzione e Definizioni

Definition 1.1.1 — Dominio e Immagine. Una *Funzione* reale di una variabile reale è una applicazione $F : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, che assegna ad ogni valore $x \in \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}$ della variabile *indipendente*, uno ed un solo valore $y\ (\in \mathbb{R})$ della variabile *dipendente*. Il sottoinsieme $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}$, i cui elementi sono tutti i possibili valori da poter assegnare alla variabile indipendente x è detto *"Dominio"* della funzione stessa, mentre l'insieme $\mathrm{I}m(F)$, costituito da tutti i possibili *risultati* (y) ottenibili, è detto *"Immagine"* (o *"Codominio"*) della funzione. Si sottolinea la necessità di avere un unico valore di y associato ad ogni x; le applicazioni che assegnano ad ogni x più di in valore, sono dette *polidrome*, e non sono da considerare vere funzioni. Per esempio, ogni applicazione il cui grafico è una figura piana "chiusa", come un cerchio o un ellisse, non è una funzione.

Definition 1.1.2 — Grafico di una Funzione. Il "Grafico di una Funzione" $\mathscr{G}$ è definito come il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ i cui elementi sono le coppie ordinate $(x, F(x))$ con $x \in \mathscr{D}$.

Definition 1.1.3 — Iniettività, Suriettività e Biiettività.

1. Una funzione $y = F(x)$ è detta *"Iniettiva"* in un intervallo $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{D}$ se e solo se $y(x_1) = y(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, cioè se *"non è possibile ottenere lo stesso risultato (y) partendo da due elementi distinti del Dominio"* $(x_1 \neq x_2)$. Se di una funzione viene dato il Grafico, un modo semplice per verificarne l'iniettività è il seguente: *"Una funzione è iniettiva se il suo grafico non interseca alcuna retta parallela all'asse delle ascisse in più di un punto"*.
2. Una funzione $F : \mathscr{D} \to \mathscr{B}$ (con $\mathscr{B} \subseteq \mathbb{R}$) è detta *"Suriettiva"* se e solo se $\forall y \in \mathscr{B}\, \exists x (\in \mathscr{D})$ tale che $y = F(x)$. In altre parole, se ogni elemento di $\mathscr{B}$ può essere ottenuto come risultato dell'applicazione di F su *almeno* un elemento x del suo Dominio. In modo analogo a quanto detto sopra, potremo anche dire che la funzione F è *"Suriettiva"* su $\mathscr{B}$ se ogni retta di equazione $y = k$, con $k \in \mathscr{B}$, interseca il grafico di F *almeno* in un punto.
3. Diremo infine che una funzione $F : \mathscr{I} \to \mathscr{B}$ è *"Biiettiva"* (o *"Biunivoca"*) se è sia iniettiva (in $\mathscr{I}$) che suriettiva (su $\mathscr{B}$). Talvolta, se $\mathscr{I} \neq \mathscr{D}$, la funzione F è detta *"localmente iniettiva"*.

Definition 1.1.4 — La Funzione Inversa. L'applicazione inversa $F^{-1} : \mathrm{I}m(F) \to \mathscr{D}$ associa ad ogni $y \in \mathrm{I}m(F)$ una (*o più*) $x \in \mathscr{D}$ tale che $y = F(x)$. Evidentemente, affinchè questa applicazione sia essa stessa una funzione (cioè sia *ad un sol valore*), occorre che almeno localmente la F sia iniettiva. Ragion per cui, se vogliamo che l'inversa esista su tutto l'insieme "immagine" ($\mathrm{I}m(F)$), occorre che la F sia *biiettiva*.

Definition 1.1.5 — La funzione Composta. Siano $F : A \to B$ e $G : B \to C$ due funzioni; allora definiamo $G \circ F : A \to C$ la *"Funzione Composta"* ottenuta applicando dapprima la F (su $x \in A$) e poi la G (per ottenere un elemento $z \in C$). Naturalmente, $G \circ F$ è distinta dalla $F \circ G$. Caso particolarmente semplice è la composizione di una funzione con la propria funzione inversa; in tal caso, evidentemente, si ha: $F^{-1} \circ F = F \circ F^{-1} = I$, dove $I : A \to A$ è la "Funzione Identità": $I(x) = x\,,\ \forall x \in A$.

1.1.1 Proprietà di Simmetria di una Funzione

1. Una funzione $F(x)$ è detta "pari" $\Leftrightarrow$ $F(-x) = F(x)\,,\ \forall x \in \mathscr{D}$; in tal caso il suo Grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
2. Una funzione $F(x)$ è invece detta "dispari" $\Leftrightarrow$ $F(-x) = -F(x)\,,\ \forall x \in \mathscr{D}$; questa volta il grafico è simmetrico rispetto all'origine delle coordinate.
3. Chiaramente, se $F(-x) \neq \pm F(x)$, la funzione non è simmetrica.

■ **Example 1.1 — Funzione pari.**

$$f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{\cos x + 1}} \quad \Rightarrow \quad f(-x) = f(x)\,.$$

■

■ **Example 1.2 — Funzione dispari.**

$$f(x) = \frac{x^3-x}{\log|x^2-1|} \quad \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x)\,.$$

■

■ **Example 1.3 — Funzione non-simmetrica.**

$$f(x) = x^3 - x^2\sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f(-x) \neq \pm f(x)\,.$$

■

1.1.2 Dominio di una Funzione

Come si è detto, il "Dominio" di una funzione F è l'insieme $\mathscr{D}$ ($\subseteq \mathbb{R}$) su cui è definita la funzione stessa, nel senso che *esiste* ed è *unico* il risultato di $F(x)$, $\forall x \in \mathscr{D}$. Fondamentalmente ci sono quattro condizioni da porre sulla F per determinarne il Dominio; queste possono essere scritte come segue:

1. tutti i *denominatori* devono essere posti diversi da zero;
2. tutti gli argomenti delle radici ad indice pari devono essere posti maggiori o uguali a zero;
3. tutti gli argomenti dei logaritmi devono essere posti strettamente maggiori di zero;
4. tutti gli argomenti delle funzioni trigonometriche inverse "arcsin" e "arccos" devono $\in [-1,1]$.

■ **Example 1.4**

$$f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \pm 1\}\,.$$

■

■ **Example 1.5**

$$f(x) = x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow \mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{x+1}{x-1} > 0 \cup (x-1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -1 \cup x > 1\}.$$

■

■ **Example 1.6**

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{3x+1}} \Rightarrow \mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{x^2-1}{3x+1} \geq 0 \cup (3x+1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x < -\frac{1}{3} \cup x \geq 1\}.$$

■

1.1.3 Eventuale discussione del “valore assoluto”

Se la $f(x)$ contiene al suo interno un *valore assoluto*, diciamo $|g(x)|$, spesso conviene farne la discussione, come segue:

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x), & \text{in } \mathscr{S}_+ = \{x \in \mathscr{D} \,|\, g(x) \geq 0\}; \\ -g(x), & \text{in } \mathscr{S}_- = \{x \in \mathscr{D} \,|\, g(x) < 0\}; \end{cases} \tag{1.1}$$

in questo modo la funzione iniziale $f(x)$ è separabile in due funzioni distinte, $y_+ = f_+(x)$ (nella quale si è sostituito $|g(x)|$ con $g(x)$) definita in $\mathscr{S}_+ \cap \mathscr{D}$, e $y_- = f_-(x)$ (dove invece $|g(x)|$ è stato sostituito con $-g(x)$) definita in $\mathscr{S}_- \cap \mathscr{D}$, che possono essere studiate separatamente nei rispettivi domini.

■ **Example 1.7** Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{\log|x^2-1|}.$$

Il valore assoluto al denominatore va discusso come segue:

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & \text{in } \mathscr{S}_+ = \{x \leq -1 \cup x \geq 1\}, \\ 1-x^2, & \text{in} \mathscr{S}_- = \{-1 < x < 1\}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Questo significa che, invece di studiare la $f(x)$ originaria, si possono studiare le seguenti due funzioni:

$$y = f(x) = \begin{cases} y_+ = \dfrac{x^3-x}{\log(x^2-1)}, & \text{in } \mathscr{S}_+ \cap \mathscr{D} = \{x < -1 \cup x > 1\,, x \neq \pm\sqrt{2}\}, \\ y_- = \dfrac{x^3-x}{\log(1-x^2)}, & \text{in } \mathscr{S}_- \cap \mathscr{D} = \{-1 < x < 0 \cup 0 < x < 1\}, \end{cases} \tag{1.3}$$

■

dove si è tenuto conto del Dominio della Funzione.

1.1.4 Intersezione della Funzione con gli assi cartesiani

1. L'intersezione della funzione con l'asse delle ascisse si ottiene studiando l'equazione: $f(x) = 0$;
2. L'intersezione con l'asse delle ordinate è possibile solo se $x = 0 \in \mathscr{D}$.

■ **Example 1.8** Sia data la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{\log(x^2+1)};$$

il suo dominio si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2+1>0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \log(x^2+1) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

da cui deduciamo che $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{0\}$. Pertanto, non è possibile avere alcuna intersezione con l'asse delle ordinate ($x = 0$). D'altra parte, le eventuali intersezioni con l'asse delle x possono essere ottenute risolvendo l'equazione:

$$y = \frac{x^3 - x}{\log(x^2+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2-1) = 0,$$

le cui soluzioni sono: $x = 0$, $x = \pm 1$. Di queste, le uniche accettabili, appartenendo al Dominio della funzione, sono: $x = \pm 1$. Quindi, in definitiva le uniche intersezioni con gli assi si hanno solo nei seguenti punti: $P_1(-1,0)$ e $P_2(1,0)$. ■

1.1.5 Studio del Segno di una Funzione

Il passo successivo è lo studio del *segno* della funzione; ciò equivale a determinare il sottoinsieme $\mathscr{D}_+$ del Dominio in cui $f(x) \geq 0$ (ovviamente in $\mathscr{D} - \mathscr{D}_+$ avremo $f(x) < 0$). Da un punto di vista pratico, si tratta quindi di trovare le soluzioni della disequazione $f(x) > 0$; vediamone un esempio:

■ **Example 1.9** Sia data la funzione:

$$y = f(x) = x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Il Dominio risulta essere: $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \cup x > 1\}$; inoltre, non esistono intersezioni né con l'asse delle ordinate, poiché $\{x = 0\} \notin \mathscr{D}$, né con l'asse delle x, visto che l'equazione $y = 0$ non ammette soluzioni accettabili. Per lo studio del segno, dobbiamo risolvere la disequazione: $y > 0$; il risultato che si ottiene è il seguente: $y > 0 \ \forall x \in \mathscr{D}$, cosicché il grafico della funzione è ovunque sopra l'asse delle ascisse. ■

1.2 Limiti e Asintoti

Lo strumento del *"Limite"* è una sorta di *lente di ingrandimento* (o *cannocchiale*) per poter studiare *da vicino* il comportamento di una funzione intorno ad un punto (finito), oppure per studiarne il comportamento asintotico quando la variabile x tende all'infinito. Qui ne daremo dapprima le definizioni formali, per poi vederne una versione più *intuitiva*.

Definition 1.2.1 — Definizioni "formali" di Limite di una funzione. •

- **[limite "finito-finito"]**: Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$

- **[limite “finito-infinito”]**: Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, M > 0\, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| > M\,.$$

- **[limite “infinito-finito”]**: Diremo invece che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_0 > 0 \mid \forall x > x_0 \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$

- **[limite “infinito-infinito”]**: Diremo infine che:

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, M > 0\, \exists\, x_0 > 0 \mid x > x_0 \;\Rightarrow\; f(x) > M\,.$$

Negli ultimi due casi la generalizzazione al limite per $x \to -\infty$ è immediata.

A queste definizioni *formali* corrispondono le seguenti definizioni “intuitive”:

Definition 1.2.2 — Definizioni “ intuitive” di Limite di una funzione. •

- **[limite “finito-finito”]**: Diremo che: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow$ *“$f(x)$ diventa arbitrariamente vicina a l quando x si avvicina sempre di più ad un certo valore x_0 ”.*
- **[limite “finito-infinito”]**: Diremo che: $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty \quad \Leftrightarrow$ *“$|f(x)|$ aumenta sempre più, mano a mano che x si avvicina a x_0 ″.*
- **[limite “infinito-finito”]**: Sarà invece $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow$ *“quando x cresce illimitatamente (in valore assoluto), la $f(x)$ si avvicina sempre più ad un valore finito l ″.*
- **[limite “infinito-infinito”]**: Diremo infine che: $\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = \infty \quad \Leftrightarrow$ *“col crescere illimitatamente di $|x|$, anche $|f(x)|$ aumenta indefinitamente”.*

Per poter studiare il comportamento di una funzione agli estremi del Dominio e trovarne gli eventuali asintoti, è necessario utilizzare i limiti. Questi vanno infatti calcolati nei punti “propri” (*i.e., finiti*) o “impropri” (*i.e., infiniti*) di *Frontiera* del Dominio; tali punti devono anche essere necessariamente suoi “punti di accumulazione”; si ricorda che un punto x_0 è detto “di accumulazione” per il dominio $\mathscr{D}$ se e solo se in ogni suo intorno arbitrario $\mathscr{I}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ esistono sempre (*infiniti*) punti di $\mathscr{D}$. In modo un po’ più semplice, potremmo dire che i limiti vanno cercati per $x \to \pm\infty$ (se $\mathscr{D}$ è illimitato), e attorno (cioè, sia da *destra* che da *sinistra*, compatibilmente col Dominio $\mathscr{D}$) ai punti di non-esistenza della $f(x)$.

- Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ (finito), la retta $y = l$ è un “Asintoto Orizzontale”.
- Se $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$, la retta $x = x_0$ è un “Asintoto Verticale”
- Infine, se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, è *possibile* l’esistenza di un “Asintoto Obliquo” di equazione $y_\pm = a_\pm x + b_\pm$; per verificarne l’effettiva presenza è necessario determinarne i parametri attraverso i seguenti limiti:

$$a_\pm = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}\,,$$

che deve risultare *finito* e *non-nullo*, e:

$$b_\pm = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - a_\pm x]\,,$$

che deve essere finito.

1.2.1 Continuità di una funzione

1. **[Continuità "puntuale"]**: Una funzione $f(x)$ è detta "continua" in un punto x_0 $(\in \mathscr{D})$ se i limiti[1] "destro" e "sinistro" della $f(x)$ sono uguali tra loro ed anche uguali al valore della funzione nello stesso punto x_0, cioè: $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
2. **[Continuità in una "regione" del Dominio]**: Una funzione $f(x)$ è detta "continua" in un insieme $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{D}$ $\Leftrightarrow$ "è continua in tutti i suoi punti, cioè se è continua $\forall x \in \mathscr{S}$.

1.2.2 Discontinuità di una funzione

Le *"discontinuità"* che una funzione può avere sono solitamente classificate come segue:

1. **[Discontinuità di Prima Specie]**: Una funzione $f(x)$ è detta avere una *Discontinuità di Prima specie* in un punto x_0 se i limiti *destro* e *sinistro* (per $x \to x_0$) esistono finiti, ma sono diversi tra loro;
2. **[Discontinuità di Seconda Specie]**: Una funzione $f(x)$ è invece detta avere una *Discontinuità di Seconda specie* in un punto x_0 se almeno uno dei due limiti, *destro* e *sinistro*, risultano infiniti o non esistono;
3. **[Discontinuità di Terza Specie]**: $f(x)$ è infine detta *Discontinua di Terza specie* in un punto x_0, se i limiti destro e sinistro esistono finiti e sono uguali tra loro, ma risultano diversi dal valore della $f(x)$ nel punto x_0; talvolta, questo tipo di discontinuità è anche detto "eliminabile" o "apparente".

1.2.3 Forme "Indeterminate"

I limiti più semplici sono ovviamente quelli in cui il risultato è ottenibile semplicemente sostituendo nell'espressione della funzione il valore x_0 (finito o infinito che sia) a cui tende la variabile indipendente x, come per esempio nel seguente caso: $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^3+1} = \sqrt{2^3+1} = 3$. Spesso, tuttavia, la sostituzione di x_0 alla x non conduce direttamente al risultato. Per poter trattare questi limiti è necessario introdurre i concetti di *"infinito"* e di *"infinitesimo"*, che possono essere definiti *semplicemente* come segue:

Definition 1.2.3 — Infiniti ed Infinitesimi. Una quantità a è detta *"Infinito"* $\Leftrightarrow$ $\lim |a| = \infty$, ed è invece detta *"Infinitesimo"* $\Leftrightarrow$ $\lim |a| = 0$. Inoltre, introduciamo il seguente criterio: detti a, b due infiniti, diremo che a è di ordine superiore rispetto a b se e solo se $\lim \frac{b}{a} = 0$, mentre saranno detti infiniti dello stesso ordine se e solo se $\lim \frac{b}{a} = l$ (finito, $\neq 0$). Analogamente per gli infinitesimi: detti a e b due infinitesimi, a è detto di ordine superiore rispetto a b se e solo se $\lim \frac{a}{b} = 0$, mentre sono detti dello stesso ordine se, come sopra, $\lim \frac{b}{a} = l$ (finito, $\neq 0$).

Per poter confrontare i vari infiniti o infinitesimi, risultano utili i seguenti criteri di *Gerarchia*:

$$\begin{cases} \text{per } x \to \infty \,:\, e^x \gg x^n \gg x^m \,(\text{se } n > m) \gg \log(x)\,; \\ \text{per } x \to 0 \,:\, x^n \gg x^m \,(\text{se } n < m)\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Nel caso in cui l'espressione di cui si deve calcolare il limite è data dal rapporto di due *funzioni*, $f(x)$ e $g(x)$, le situazioni che ancora non presentano alcuna difficoltà sono le seguenti (dove si è indicato con l un generico valore *finito, non-nullo*):

1. $$f \to l, \infty\,, \quad g \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim \left| \frac{f}{g} \right| = \infty;$$

[1] Si ricorda che la dicitura limite "destro" sta ad indicare che in questo caso facciamo tendere x ad x_0 da *destra*, cioè da valori più grandi; nel limite "sinistro", ovviamente, al contrario, da valori più piccoli.

2.
$$f \to 0\,, \quad g \to l, \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\left(\frac{f}{g}\right) = 0\,;$$

3.
$$f \to l\,, \quad g \to \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\left(\frac{f}{g}\right) = 0\,;$$

4.
$$f \to \infty\,, \quad g \to l \quad \Rightarrow \quad \lim\left|\frac{f}{g}\right| = \infty\,.$$

I casi più interessanti (e complessi) si hanno quando la diretta sostituzione di x_0 alla x nell'espressione del limite porta ad una *"forma indeterminata"*. Queste sono classificabili in tre categorie:

1. **[Forme Indeterminate del Primo Tipo]**: queste sono $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$; evidentemente, questo tipo di indeterminazione è possibile quando la funzione contiene il rapporto di due termini che sono entrambi *infiniti* o entrambi *infinitesimi* (cioè, entrambi tendono a zero);
2. **[Forme Indeterminate del Secondo Tipo]**: queste sono $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$. La prima si incontra quando nella funzione troviamo il prodotto di due termini, uno che tende a zero e l'altro che tende ad infinito, mentre la seconda è presente quando abbiamo la differenza di due termini, entrambi tendenti ad infinito.
3. **[Forme Indeterminate del Terzo Tipo]**: queste sono: 1^∞ , 0^0 ∞^0 . Tutte presenti quando all'interno della funzione troviamo un'espressione del tipo $[g(x)]^{h(x)}$. In questo caso, allo scopo di semplificare il limite, conviene spesso utilizzare la seguente identità: $g(x)^{h(x)} = e^{h(x)\log[g(x)]}$.

Solitamente, un primo passo verso il *calcolo* del limite è quello di ridurre tutte le forme indeterminate a quelle di "Primo tipo". Dopodiché, si possono applicare i criteri di *gerarchia* tra infiniti ed infinitesimi dati sopra. Oltre a questi, per semplificare ulteriormente l'espressione, risultano spesso utili anche le seguenti relazioni[2], valide per $x \to 0$:

- $e^x \simeq 1 + x + \ldots\,,$
- $\log(x+1) \simeq x + \ldots\,,$
- $(1 \pm x)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha x + \ldots\,,$
- $\sin x \simeq x + \ldots\,.$

■ **Example 1.10** Come semplice applicazione di queste formule, diamo, per esempio, anche il seguente *risultato*: per $x \to 0$, si può scrivere: $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \simeq \sqrt{1 - x^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2$. ■

Quando le (1.2.3) non sono sufficienti ad eliminare l'indeterminazione dell'espressione di cui si vuole calcolare il limite, occorre aggiungere i termini successivi degli sviluppi in serie corrispondenti.

1.2.4 "Ricetta" per il calcolo dei Limiti

La procedura da seguire per risolvere un limite (diciamo, $\lim_{x \to x_0} f(x)$) può essere riassunta nei seguenti punti:

1. Si *prova* ad effettuare la sostituzione $x \to x_0$ nell'espressione del limite, sia che x_0 sia *finito* che *infinito*; se otteniamo un risultato "determinato" abbiamo finito. Se invece (solitamente questo è il caso !) otteniamo una qualche "*Forma Indeterminata*", allora:
2. dobbiamo suddividere il limite in "blocchi" distinti;

[2] In realtà, si tratta solo dei primi termini dei corrispondenti sviluppi in serie di Taylor-Mac Laurin.

3. per ciascun "blocco" dobbiamo individuare il "Termine Dominante"[3] e *fattorizzarlo*. Solitamente, a questo punto, i blocchi assumono una forma tale da poter applicare i criteri di *gerarchia* o le formule (1.2.3) scritte in precedenza.

Cercheremo di chiarire quanto detto con qualche esempio:

■ **Example 1.11** Calcolare il seguente limite:

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt[4]{x^4-1}}{\log(e^x+x)-x};$$

come si vede, il limite da risolvere è già suddiviso convenientemente in quattro blocchi; raccogliamo quindi, in ciascuno, il "termine" dominante:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^4}}\right)}{\log\left[e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]-x} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[\left(1-\frac{3}{2x}\right)-\left(1-\frac{1}{4x^4}\right)\right]}{x+\log\left(1+\frac{x}{e^x}\right)-x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-\frac{3}{2x}+\frac{1}{4x^4}\right)}{\left(1+\frac{x}{e^x}\right)-1} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4x^3}\right) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{2x} = -\infty.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

■

■ **Example 1.12** Calcolare il limite:

$$L_2 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\log(1+x)}{\log x}\right)^x;$$

[3] Il cosiddetto *"Leading Term"*.

Come suggerito in (1.2.3), il calcolo viene semplificato come segue:

$$
\begin{aligned}
L_2 = \exp\left\{\lim_{x\to\infty} x \log\left(\frac{\log(1+x)}{\log x}\right)\right\} = \\
= \exp\left\{\lim_{x\to\infty} x \log\left[\frac{\log\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\log x}\right]\right\} = \\
= \exp\left\{\lim_{x\to\infty} x \log\left[\frac{\log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x}\right]\right\} = \\
= \exp\left\{\lim_{x\to\infty} x \log\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x}\right)\right\} = \\
= \exp\left\{\lim_{x\to\infty} x \log\left(1+\frac{\frac{1}{x}}{\log x}\right)\right\} = \\
= \exp\left\{\lim_{x\to\infty} x \frac{1}{x\log x}\right\} = e^0 = 1\,.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

■

■ **Example 1.13** Calcolare il seguente limite:

$$L_3 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}\,;$$

anche in questo caso il limite è già suddiviso in blocchi, per cui è sufficiente applicare alle radici del numeratore le "Formule Magiche" date in (1.2.3):

$$
\begin{aligned}
L_3 = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)-\left(1-\frac{1}{4}2x\right)}{x(1+x)} = \\
= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)}{x(1+x)} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

■

1.3 La Derivata di una Funzione

Nella Cinematica, ovvero quella parte della Meccanica che si occupa solo di descrivere i moti senza occuparsi delle cause che li hanno provocati, un ruolo fondamentale è giocato dalla "velocità". In particolare, la "velocità *media*" è data dal rapporto tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo, un concetto senz'altro familiare a tutti; ma, come definire la velocità indicata dal tachimetro delle nostre auto ad un certo istante, durante il moto ? Questa è la cosiddetta "velocità *istantanea*", e indica lo spazio che si *percorrerebbe* nell'unità di tempo qualora lo stato di moto non venisse modificato; per esempio, avere una velocità istantanea di 50 km/h significa che percorreremmo 50 km in un'ora se continuassimo a procedere con questa velocità, senza né accelerare, né frenare. Matematicamente, disegnando un grafico che descrive il moto nel piano (t,S), la velocità ad un certo istante rappresenta la *"pendenza"* della curva, cioè il "coefficiente angolare" della retta tangente a tale curva in quell'istante. Questa pendenza è detta "Derivata" dello spazio rispetto al tempo. Vediamone la definizione formale:

Definition 1.3.1 — La Derivata Prima. Sia data una generica funzione $y = f(x)$ continua in un punto $x_0 \in \mathscr{D}$, con $y_0 = f(x_0)$. Se incrementiamo la variabile indipendente x di una quantità Δx, anche la variabile dipendente y subirà una certa variazione (positiva, negativa o nulla): $y(x+\Delta x) = y_0 + \Delta y$; il tasso *relativo* di variazione della y rispetto alla x è descritto dal cosiddetto "rapporto incrementale": $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. La pendenza *istantanea* si ottiene prendendo il limite di questo rapporto per incrementi sempre più piccoli Δx; se questo limite esiste finito tale *pendenza* è detta "Derivata" della funzione $y(x)$ nel punto considerato x_0, ed è rappresentata in diversi modi: $y'(x) = f'(x) = Df(x) = \frac{dy}{dx}$:

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

(dove, per maggior brevità, si è indicato l'incremento Δx semplicemente con h).

1.3.1 Regole generali di Derivazione

Nelle seguenti regole elementari di "derivazione", $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni arbitrarie, mentre $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $$y(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x);$$
- $$y(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$
- $$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2};$$
- $$y(x) = [f \circ g](x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = [f' \circ g](x)] \cdot g'(x).$$

Quest'ultima regola, che dà la derivata di una funzione composta, può anche essere espressa diversamente: se $y(x) = [f \circ g](x) \equiv f[g(x)]$, allora, formalmente, si può scrivere:

$$y'(x) \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \equiv (f' \circ g) \cdot g'.$$

1.3.2 La Derivata delle Funzioni Elementari

Le funzioni *elementari* hanno le seguenti regole di derivazione:

1. $$y(x) = k (\text{=costante}) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0; \tag{1.9}$$

2. $$\begin{aligned} &y(x) = mx + q \quad \Rightarrow \\ &y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[m(x+h)+q] - (mx+q)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m \end{aligned} \tag{1.10}$$

   (come ci si sarebbe dovuto aspettare, essendo m proprio il "coefficiente angolare" della *retta* descritta dalla funzione $y(x)$;

3.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= ax^2+bx+c \quad \Rightarrow \\
y'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{[a(x+h)^2+b(x+h)+c]-(ax^2+bx+c)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2axh+ah^2+bh}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}(2ax+ah+b) = 2ax+b\,;
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

generalizzando, la derivata della generica potenza (anche con esponente frazionario) può essere calcolata come segue:

4.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= x^n \quad \Rightarrow \\
y'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n + n x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} x^2 h^{n-2} + n x h^{n-1} + h^n\right) - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} x^2 h^{n-3} + n x h^{n-2} + h^{n-1}\right) = \\
&= n x^{n-1}\,,
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

valida non solo per $n \in \mathbb{N}$, ma $\forall n \in \mathbb{R}, (\neq 0\,)$;

5.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sin(x) \quad \Rightarrow \\
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\right) \simeq \\
&\simeq \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{1-\frac{1}{2}h^2+\cdots-1}{h} + \cos x \frac{h+\ldots}{h}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\cos x - \frac{h}{2}\sin x\right) = \cos x\,;
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= e^x \quad \Rightarrow \\
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x\,(e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{1+h+\cdots-1}{h} = e^x\,;
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

questa è proprio la caratteristica fondamentale della funzione esponenziale di base e (il numero di *Nepero*: $e \simeq 2.718\ldots$): $y(x) = e^x$ è l'unica funzione identicamente uguale alla sua derivata.

7.

$$\begin{aligned} y(x) &= \log x \quad \Rightarrow \\ y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{x}}{h} = \frac{1}{x} \,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Vediamo come determinare la derivata della funziona inversa:

Definition 1.3.2 — Derivata della Funzione Inversa. Sia $y = f(x)$ una funzione, la cui derivata sia: $y' \equiv \frac{dy}{dx}$; invertendo la funzione si ottiene: $x = f^{-1}(y)$, la cui derivata si potrà quindi scrivere: $[f^{-1}]' \equiv \frac{dx}{dy} \equiv \frac{1}{y'[x(y)]}$. Chiariamo questo fatto con un esempio, di cui già conosciamo il risultato:

■ **Example 1.14** Sia $y = e^x$; come si è visto la sua derivata è identica alla funzione stessa: $y' \equiv \frac{dy}{dx} = e^x$; invertendo la funzione si ottiene: $x = \log y$; secondo la prescrizione appena mostrata si avrà allora: $x' \equiv \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'[x(y)]} = \frac{1}{e^{x(y)}} \equiv \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$; questo significa che la derivata della funzione $y = \log x$ è quindi $y' = \frac{1}{x}$, concordemente con quanto ottenuto precedentemente. ■

Vediamone un altro esempio:

■ **Example 1.15** Si voglia determinare la derivata della funzione trigonometrica inversa: $y(x) = \arcsin x$: invertendo si ha: $x = \sin y$, di cui conosciamo la derivata: $x' \equiv \frac{dx}{dy} = \cos y$: pertanto, la derivata di $y(x)$ sarà data da: $y' \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \equiv \frac{1}{x'[y(x)]} = \frac{1}{\cos y(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, che è il risultato cercato. ■

Diamo adesso due esempi di applicazione della regola per la derivazione di funzioni composte:

■ **Example 1.16** Si vuole calcolare la derivata della funzione:

$$y(x) = \sqrt[3]{\log\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)} \equiv (\log[f(x)])^{1/3} \,,$$

dove si è posto:

$$f(x) = \left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right) \;;$$

in questo caso, l'applicazione (ripetuta) dell'ultima delle regole date in (1.3.1), porta al seguente risultato:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{3}(\log f(x))^{\frac{1}{3}-1}\,(\log f(x))' = \\ &= \frac{1}{3(\log f)^{2/3}} \cdot \frac{1}{f} \cdot f' = \\ &= \frac{x^2+1}{3(x^2+4)\left[\log\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)\right]^{2/3}} \cdot \frac{2x(x^2+1)-(x^2+4)2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= -\frac{2x}{(x^2+4)(x^2+1)\left[\log\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)\right]^{2/3}} \,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

■

■ **Example 1.17** Si determini la derivata della seguente funzione:

$$y(x) = \log \sqrt{\sin\left[\log(x^2+1)\right]} \equiv \frac{1}{2}\log\left[\sin\left(\log f\right)\right] \equiv \frac{1}{2}\log(\sin g) \equiv \frac{1}{2}\log h\,,$$

dove si è posto: $h = \sin g$, $g = \log f$, $f = x^2 + 1$. Quindi, applicando più volte la cosiddetta *regola della "catena"*, si ottiene:

$$\begin{aligned} y' \equiv \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dh}\,\frac{dh}{dg}\,\frac{dg}{df}\,\frac{df}{dx} = \\ &= \frac{1}{2h}\cdot\cos(g)\cdot\frac{1}{f}\cdot 2x = \\ &= \frac{x\cos\left[\log(x^2+1)\right]}{(x^2+1)\sin\left[\log(x^2+1)\right]} = \\ &= \frac{x}{x^2+1}\,\cot\left[\log(x^2+1)\right]\,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

■

Definition 1.3.3 — Derivabilità (puntuale) di una Funzione. Una Funzione $y = f(x)$ è detta "derivabile" in un punto x_0 $(\in \mathscr{D})$ $\Leftrightarrow \exists$ *finito* il limite (sia *destro* che *sinistro*) del suo "rapporto incrementale" intorno a tale punto; ovvero, se $\exists\, \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f'(x_0) = l$ (*finito*). Diremo quindi che $f(x)$ è "derivabile" in una regione $\mathscr{S}$ $(\subseteq \mathscr{D})$ $\Leftrightarrow$ "è *derivabile* in tutti i suoi punti, cioè se è derivabile $\forall x \in \mathscr{S}$."

R Naturalmente, condizione *necessaria* (ma non sufficiente) per la derivabilità di una funzione in un insieme $\mathscr{S}$ è che in tale regione la $f(x)$ sia "continua". Detto in altre parole, *"la derivabilità implica la continuità"*; non è invece vero il viceversa: *esistono funzioni continue che hanno punti di non derivabilità*, come $y = |x|$ e $y = \sqrt[3]{x}$. Entrambe sono continue ovunque, ma non derivabili in $x = 0$. Per la prima, i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale esistono finiti, ma diversi tra loro: $+1$ e -1, rispettivamente. Per la seconda, invece, i due limiti destro e sinistro sono uguali tra loro, ma non sono finiti: $\lim_{x\to 0} \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \to +\infty$.

1.3.3 Lo Studio della Derivata Prima

Dopo aver effettuato lo studio dei limiti e degli asintoti di una funzione, è necessario fare un *mini*-studio della sua derivata (prima). Questo studio permette di determinare gli intervalli di *"crescenza"* (dove $y' > 0$) e di *"decrescenza"* (dove $y' < 0$), come pure i cosiddetti *"Punti Stazionari"* (dove $y' = 0$), della funzione stessa. I punti di *massimo* (max) e *minimo* (min) della funzione vanno ricercati tra i punti stazionari e tra i punti di non-derivabilità (ma di continuità) della $f(x)$. Vediamo più in dettaglio come si deve operare:

- Una volta calcolata la derivata prima della funzione, utilizzando le regole date in precedenza, ne va determinato il *Dominio* $\mathscr{D}'$, che per quanto si è detto in (1.3.2), è sempre necessariamente un sottoinsieme (*proprio* o meno) del Dominio della $f(x)$, cioè $\mathscr{D}' \subseteq \mathscr{D}$. Chiaramente, se i due domini coincidono significa che tutti i punti di esistenza della funzione sono anche punti di derivabilità, mentre se $\mathscr{D}' \neq \mathscr{D}$, devono esserci punti dove la funzione esiste ma non è derivabile.
- Vanno quindi cercati gli eventuali punti "stazionari", ovvero i punti nei quali si annulla la derivata prima: $y' = 0$; se ne indaga poi il *carattere* facendo lo studio del *segno* di y' . In particolare, se nel punto stazionario considerato y' cambia segno, il punto è effettivamente di massimo (se y' è ivi decrescente) o di minimo (se y' è ivi crescente). Detto altrimenti:

Definition 1.3.4 — Massimi e Minimi (relativi o assoluti) di una Funzione. Un punto x_0 $(\in \mathscr{D}')$ è di *"Massimo"* (*"Minimo"*) - relativo o assoluto - per la $f(x)$, $\Leftrightarrow$ $y'(x_0) = 0$ e $y''(x_0) < 0$ (> 0), essendo y'' la "Derivata Seconda" della funzione.

- Infine, occorre talvolta calcolare il *"Limite"* della derivata prima y' intorno a quei punti $(\notin \mathscr{D})$ vicino ai quali non è noto il comportamento della funzione. Il prossimo *esempio* chiarirà quanto detto.

■ **Example 1.18** Prendiamo, come esempio, il comportamento della funzione $y = x^x \equiv e^{x \log x}$, il cui Dominio è $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$, per $x \to 0^+$. La funzione stessa tende ad 1, come si evince dal seguente limite: $\lim_{x\to 0^+} e^{x \log x} \sim e^{0^+ \cdot \log(0^+)} \sim e^{0^+ \cdot (-\infty)} \sim e^{0^-} \sim 1^- = 1$, dove si è tenuto conto che, *gerarchicamente*, la funzione "logaritmo" è più *debole* di ogni potenza di x. Ciò che ancora non sappiamo, è come la funzione si avvicina al valore " 1 " mano a mano che $x \to 0^+$, cioè con che "pendenza"; poiché $x = 0 \notin \mathscr{D}$, non possiamo calcolare in tale punto neppure la derivata della funzione, ma dobbiamo accontentarci di farne il limite; l'espressione della derivata è: $y' = e^{x \log x}(1 + \log x)$; otteniamo così:

$$\lim_{x\to 0^+} y' = \lim_{x\to 0^+} e^{x \log x}(1 + \log x) \sim 1 \cdot [1 + \log(0^+)] \sim -\infty\,,$$

che in effetti chiarisce univocamente come la funzione tenda ad 1, per così dire, *tangenzialmente* all'asse stesso delle ordinate. ■

1.3.4 Teorema di L'Hopital

La derivata può talvolta trovare un'utile applicazione nel calcolo dei limti di Forme Indeterminate del *"Primo Tipo"*, $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, di cui abbiamo già parlato in (1.2.3). Questa applicazione si basa sul cosiddetto "Teorema di L'Hopital", che enunciamo senza dimostrazione:

Theorem 1.3.1 — Teorema di L'Hopital. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, entrambe *infinitesime* o *infinite* per $x \to x_0$ (cioè tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\,($o ∞)), continue in un opportuno intervallo chiuso $[a,b]$ (contenente x_0) e derivabili *almeno* al suo interno (cioè nell'intervallo aperto $]a,b[$); inoltre la derivata g' di $g(x)$ non si annulli mai in $[a,b]$. Allora, sotto tali ipotesi, il limite per $x \to x_0$ del rapporto tra le due funzioni (forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$) è uguale al limite (se esiste) del rapporto delle rispettive derivate. In formula:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Vediamo un semplice esempio di applicazione di questo teorema:

■ **Example 1.19** Si calcoli il seguente limite:

$$\mathscr{L} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos x}{x - \sin x}\,.$$

Il limite è indeterminato del tipo $\frac{0}{0}$, e le funzioni al numeratore e al denominatore soddisfano tutte le ipotesi del Teorema. Applicando quindi la "Regola di L'Hopital" (per ben tre volte!), si riesce ad eliminare l'indeterminazione e ottenere il risultato cercato:

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + x\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin x + x\cos x}{\sin x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x + \cos x - x\sin x}{\cos x} = 3\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

■

1.3.5 La Derivata Seconda

In (1.3.4) abbiamo già incontrato la "Derivata Seconda" di una funzione, e abbiamo visto come può essere utilizzata per classificare i *Punti Stazionari* (ove $y' = 0$): questi sono punti di "massimo" se la derivata seconda è negativa ($y'' < 0$), e punti di minimo se invece questa è positiva ($y'' > 0$). Come si è detto, la Derivata Prima rappresenta la *Pendenza* della funzione in ogni suo punto; ma qual'è il significato *geometrico* della Derivata Seconda ? Questa caratterizza la "Curvatura" della funzione, nel senso che, dove $y'' > 0$ la funzione è "Convessa" (curvatura rivolta verso l'alto), mentre dove $y'' < 0$ la funzione è "Concava" (curvatura rivolta verso il basso). I punti in cui y'' cambia segno sono detti "Punti di Flesso", *obliqui* se $y' \neq 0$, o *orizzontali* se $y' = 0$.

Le caratteristiche di un punto in cui si annullano tutte le prime n-derivate, ma non la successiva $(n+1)$-esima, è precisato dal seguente:

Theorem 1.3.2 — Teorema delle Derivate Successive. Data una funzione $y(x)$, se in un punto x_0 $(\in \mathscr{D}^{(n+1)})$ in cui la funzione è derivabile (almeno) $(n+1)$ volte, si ha che tutte le prime n derivate sono nulle ($y'(x_0) = y''(x_0) = \cdots = y^{(n)}(x_0) = 0$), ma la successiva è diversa da zero ($y^{(n+1)}(x_0) \neq 0$), allora il punto x_0 è:
- un punto di massimo se n è dispari e $y^{(n+1)}(x_0) < 0$;
- un punto di minimo se n è dispari e $y^{(n+1)}(x_0) > 0$;
- un punto di flesso (orizzontale) se n è pari.

1.3.6 Un esempio di applicazione della Derivata alla Fisica

Un classico esempio di applicazione della derivata in Fisica è fornito dal concetto di "Velocità", che descrive in generale il tasso di variazione temporale di una certa grandezza. La velocità *spaziale* è sicuramente la più nota. Come si è già accennato in (1.3), la velocità istantanea è proprio la derivata dello spazio rispetto al tempo. Le derivate rispetto al tempo t sono solitamente indicate da un "punto" sopra la lettera che rappresenta la grandezza che si deriva. Quindi, se $s(t)$ rappresenta la cosiddetta "Legge Oraria" del nostro punto materiale, la sua velocità, istante per istante, è data dalla sua derivata: $v(t) = \dot{s}(t)$; analogamente, essendo l'accelerazione la grandezza che descrive la variazione di velocità nell'unità di tempo, avremo: $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$; in altre parole, è la derivata della velocità rispetto al tempo, o la derivata seconda dello spazio. Vediamo un esempio:

Exercise 1.1 Un punto materiale vincolato a muoversi su una retta orizzontale, la cui posizione al generico istante t è descritta dalla coordinata cartesiana $x(t)$, sia caratterizzato dalla seguente "legge oraria": $x(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$; determinare:
1. la posizione iniziale: $x(0)$;
2. la posizione all'istante $t = 1$: $x(1)$;
3. la velocità *media* nell'intervallo di tempo $[0, 1]$;
4. la velocità (istantanea) al generico istante t : $v(t)$;
5. la velocità iniziale: $v(0)$;
6. la velocità all'istante $t = 1$: $v(1)$;
7. l'accelerazione (istantanea) al generico istante t : $a(t)$;
8. l'accelerazione iniziale: $a(0)$.

Svolgimento:

1. $x(0) = e$;

2. $x(1) = a+b+c+d+e$;
3. $v_m[0,1] = \frac{x(1)-x(0)}{1-0} = a+b+c+d$;
4. $v(t) = \dot{x}(t) = 4at^3+3bt^2+2ct+d$;
5. $v(0) = d$;
6. $v(1) = 4a+3b+2c+d$;
7. $a(t) = \dot{v}(t) \equiv \ddot{x}(t) = 12at^2+6bt+2c$;
8. $a(0) = 2c$.

■

Un'altra applicazione della Derivata (prima e seconda), alla quale abbiamo già accennato in precedenza, la troviamo nello studio delle configurazioni di equlibrio di un sistema. Nel caso unidimensionale la forza (conservativa) agente su un punto materiale di massa m è ottenibile dall'energia potenziale ad essa associata dall'espressione: $F(x) = -\frac{dU}{dx}$, per cui i punti di equilibrio risultano essere proprio i punti stazionari di $U(x)$, ovvero i punti nei quali $U'(x) \equiv \frac{dU}{dx} = 0$; in particolare, l'equilibrio sarà *stabile* in corrispondenza dei punti di minimo dell'energia potenziale (ovvero dove, oltre ad essere $U' = 0$, sarà $U'' > 0$), mentre sarà *instabile* in quelli di massimo (dove $U' = 0$ e $U'' < 0$). Vediamone un esempio esplicito:

■ **Example 1.20 — Interazione Intermolecolare.** L'energia potenziale che descrive l'interazione intermolecolare è data da:

$$U(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}},$$

dove r è la distanza tra le due molecole ed a e b sono fattori costanti. La distanza di equilibrio r_e è ottenibile ponendo:

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = -\frac{6a}{r^7} + \frac{12b}{r^{13}} = 0,$$

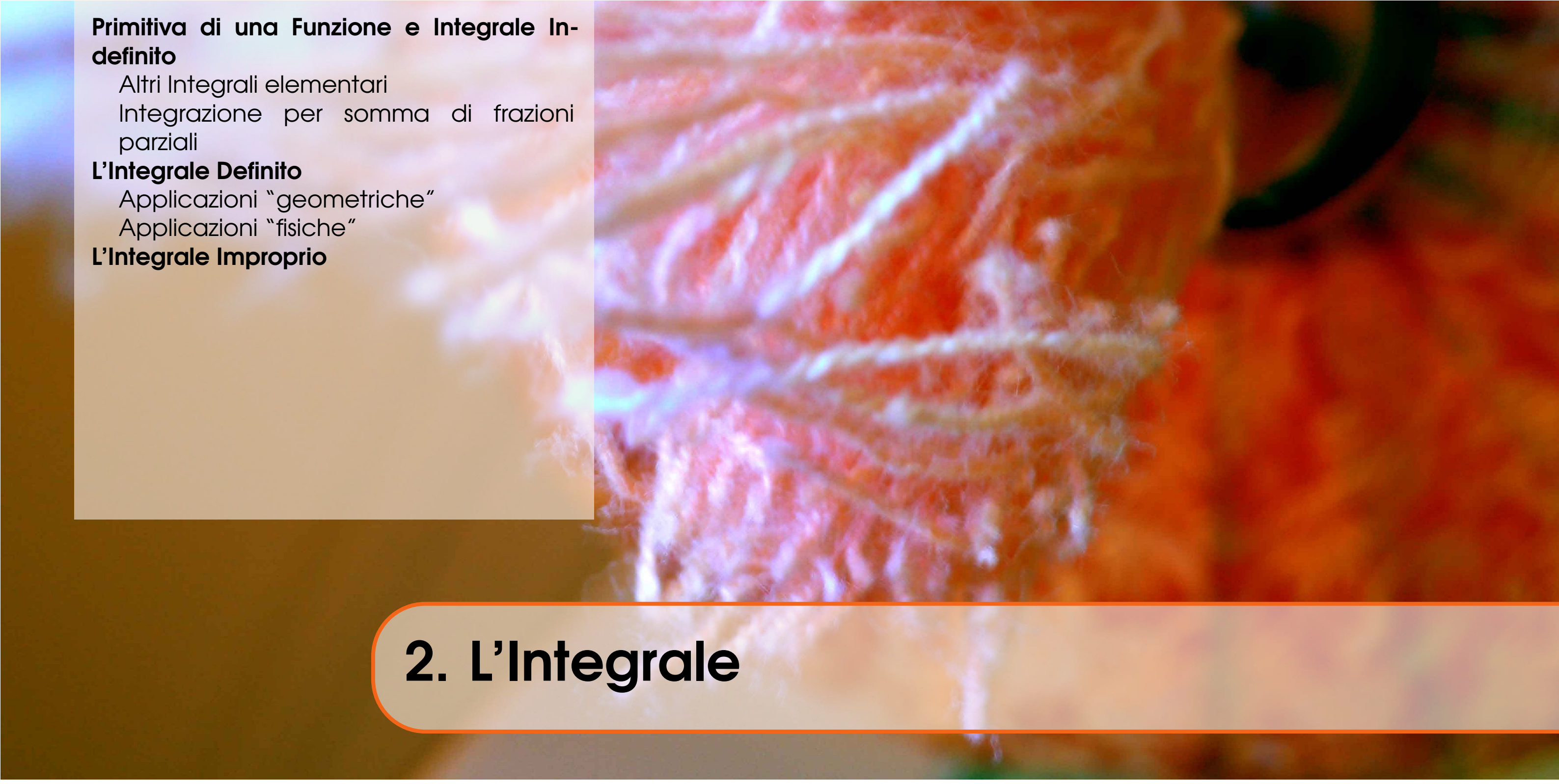
da cui si ottiene:

$$r_e = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6};$$

vediamo se si tratta di equilibrio stabile o meno: la derivata seconda è:

$$\begin{aligned} U''(r=r_e) &= \frac{6}{{r_e}^8}\left(\frac{26b}{{r_e}^6} - 7a\right) = 6\left(\frac{a}{2b}\right)^{4/3}\left(26b\cdot\frac{a}{2b} - 7a\right) = \\ &= 36\sqrt[3]{\frac{a^7}{(2b)^4}} > 0, \end{aligned} \tag{1.19}$$

cosicché possiamo concludere che la distanza trovata r_e è di equilibrio *stabile* per il sistema. ■



2. L'Integrale

In questo secondo capitolo vogliamo dare una breve introduzione al concetto di "Integrale", sia *Indefinito* che *Definito*. Cominciamo dal primo:

2.1 Primitiva di una Funzione e Integrale Indefinito

Nelle ultime *sezioni* del capitolo precedente abbiamo introdotto il concetto di Derivata di una funzione, precisandone il significato geometrico, che è quello di *ente matematico che descrive il tasso relativo di variazione di una funzione*, o più semplicemente, la *Pendenza* del grafico che descrive la funzione stessa in un certo punto. Abbiamo visto anche che, se esiste, la derivata di una funzione è "unica". In un linguaggio un po' più *operatoriale*, potremmo scrivere che, se la derivata di una funzione $f(x)$ è $F(x)$:

$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx} = F(x) = D[f(x)]\,;$$

possiamo allora introdurre il concetto di "anti-derivata", come l'operatore *inverso* D^{-1}, che applicato alla F mi riporta indietro alla f; cioè:

$$D^{-1}[F(x)] = f(x)\,.$$

La prima osservazione da fare è che questa volta il risultato non è *univoco*, ma è bensì definito a meno di una costante additiva arbitraria; infatti, poiché:

$$D[f(x)+C] = D[f(x)] + D[C] = D[f(x)] = F(x)\,,$$

risulta che: $D^{-1}[F(x)] = f(x) + C\,,\ \forall\, C = $ costante. In realtà, non si usa il termine "anti-derivata", ma si definisce:

Definition 2.1.1 — Primitiva di una Funzione. Data una funzione $F(x)$, ogni funzione $f(x)$ che abbia questa come sua derivata, è detta "Primitiva" della $F(x)$, e come si è appena visto, è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria (C). La notazione usuale è la seguente:

$$f'(x) = F(x) \quad \Rightarrow \quad \int F(x)\,dx = f(x) + C\,.$$

Spesso, senza far riferimento alla parola *Primitiva*, si usa dire (seppur impropriamente) che "se la derivata della $f(x)$ è la funzione $F(x)$ (cioè: $f'(x) = F(x)$), allora la funzione $f(x)$ è l'integrale della $F(x)$". Essendo essenzialmente l'operazione inversa della derivata, è semplice dedurre le regole elementari di integrazione da quanto visto in (1.3.2):

- $$\int (k \cdot f(x))dx = k \int f(x)\, dx\,, \quad \forall k \in \mathbb{R};$$
- $$\int (f+g)dx = \int f\, dx + \int g\, dx;$$
- $$\int 1\, dx = x + C\,;$$
- $$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C\,; \qquad \text{o generalizzando:}$$
- $$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,, \quad \forall n \in \mathbb{R},\ n \neq -1\,;$$
- $$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C;$$
- $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$
- $$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$
- $$\int e^x\, dx = e^x + C;$$
- $$\int \left(\frac{f'}{f}\right) dx = \log|f| + C\,;$$
- $$\int f'\, f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C\,;$$
- $$\int f'\, e^f\, dx = e^f + C\,;$$
- $$\int f'\, \sin(f)\, dx = -\cos(f) + C\,.$$

Fondamentalmente, i metodi di integrazione sono tre:

1. *"integrazione per parti"*: dalla regola della derivata del prodotto di due funzioni: $(f\,g)' = f'\,g + f\ g'$, troviamo: $\int (f\,g)' \equiv (f\,g) = \int f'\,g + \int f\ g'$, da cui si ottiene, in definitiva:
$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx;$$
2. *"integrazione per sostituzione"*: si debba risolvere il seguente integrale (generico): $\int f[g(x)]\, dx$; se introduciamo la nuova variabile $t = g(x)$, tenendo conto che dalla formula inversa: $x = g^{-1}(t)$ possiamo scrivere che: $dx = [g^{-1}(t)]'\, dt$, sostituendo nell'integrale originario si ottiene:
$$\int f[g(x)]\, dx = \int f(t)\, [g^{-1}(t)]'\, dt\,;$$

3. *"integrazione per somma di frazioni parziali"*: questo metodo è utilizzabile quando l'espressione da integrare, detta anche "Funzione Integranda", è data dal rapporto tra due polinomi. Questo metodo sarà trattato a parte in (2.1.2).

Vediamo qualche esempio significativo dei primi due metodi:

Example 2.1 — Esempi.

1.
$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\,dx &= \int \sin x \sin x\,dx = -\cos x \sin x - \int -\cos x\,(\cos x)\,dx = \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2(x)\,dx = -\sin x \cos x + \int [1-\sin^2(x)]\,dx = \\ &= x - \sin x \cos x - \int \sin^2(x)\,dx\,,\end{aligned} \tag{2.1}$$

da cui:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\,,$$

dove, per semplicità, abbiamo introdotto la costante d'integrazione C solo al termine del calcolo.

2.
$$\int \log x\,dx \equiv \int 1 \log x\,dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \log x - \int 1\,dx = x(\log x - 1) + C;$$

3. il precedente integrale può anche essere risolto per sostituzione, ponendo $t = \log x$, da cui: $x = e^t$, e quindi: $dx = e^t\,dt$; si trova così:
$$\int \log x\,dx = \int t\,e^t\,dt = t\,e^t - \int e^t\,1\,dt = e^t\,(t-1) \equiv x(\log x - 1) + C\,,$$
come sopra.

4. $\mathscr{I} = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a \int \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx = a \int \sqrt{1-t^2}\,a\,dt$; poniamo: $t = \cos u$, per cui: $dt = -\sin u\,du$; sostituendo, si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathscr{I} &= a^2 \int \sqrt{1-\cos^2(u)}\,(-\sin u)\,du = -a^2 \int \sin^2(u)\,du = \cdots = \\ &= \frac{a^2}{2}(\sin u \cos u - u) = \frac{a^2}{2}\left(t\sqrt{1-t^2} - \arccos(t)\right) = \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\sqrt{1-(x/a)^2} - \arccos(x/a)\right) + C = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} - a^2 \arccos\left(\frac{x}{a}\right)\right] + C\,.\end{aligned} \tag{2.2}$$

■

2.1.1 Altri Integrali elementari

- $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C;$$

- $$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + C;$$
- $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

2.1.2 Integrazione per somma di frazioni parziali

Quando la funzione integranda è data dal rapporto di due polinomi, il metodo utilizzato per svolgere l'integrale è detto "Metodo di integrazione per somma di frazioni parziali". Vediamone la *"ricetta"*:

Proposition 2.1.1 Si debba risolvere il seguente integrale:

$$\int \frac{N^{(n)}(x)}{D^{(d)}(x)} dx \,,$$

dove $N^{(n)}(x)$ e $D(x)^{(d)}$ sono due polinomi di grado n e d, rispettivamente. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $n < d$ (se inizialmente non lo fosse, possiamo sempre fare la divisione tra i due polinomi iniziali per ridurci a questa situazione). Dobbiamo allora cercare di scomporre finché è possibile il denominatore; in generale, avremo: $D^{(d)}(x) = a\,(x-\alpha_1)^{m_1}\,(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_r)^{m_r}\,Q^{(q)}(x)$, essendo α_1, α_2, $\ldots, \alpha_r$, le sue *radici* di molteplicità algebrica $m_1, m_2, \ldots, m_r$, rispettivamente, e $Q^{(q)}(x)$ la residua parte non scomponibile (in fattori *reali*) di grado q; naturalmente: $\sum_{i=1}^{r} m_i + q = d$. Sotto tali ipotesi, la funzione integranda si può allora scrivere come segue:

$$\frac{N^{(n)}(x)}{D^{(d)}(x)} = a\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{P_i^{(m_i-1)}(x)}{(x-\alpha_i)^{m_i}} + \frac{\bar{P}^{(q-1)}(x)}{Q^{(q)}(x)}\right), \tag{2.3}$$

dove i $P_i^{(m_i-1)}(x)$ sono polinomi di grado (m_i-1) e $\bar{P}^{(q-1)}(x)$ è un polinomio di grado $(q-1)$. L'integrale risultante sarà adesso ridotto in fattori più semplici rispetto a quello di partenza; per esempio, se le radici hanno molteplicità 1, il relativo integrale è del tipo: $\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \log|x-\alpha|$, e così via. Vediamo invece come possiamo risolvere l'integrale quando al denominatore abbiamo un'espressione di secondo grado non scomponibile, del tipo ax^2+bx+c, col *discriminante* $\Delta = b^2-4ac < 0$. In tal caso possiamo sempre porre: $ax^2+bx+c = a[(x-\xi)^2+\eta^2]$, dove: $\xi = -\frac{b}{2a}$, $\eta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. L'integrale può quindi assumere la seguente forma:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-\xi)^2+\eta^2} dx = \frac{1}{\eta^2 a}\int \frac{1}{\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right)^2+1} dx;$$

cambiando variabili, ponendo $t = (x-\xi)/\eta$, (da cui $x = \eta\, t + \xi$, e: $dx = \eta\, dt$), si arriva a:

$$\frac{1}{\eta a}\int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{\eta a}\arctan(t) = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{b+2ax}{\sqrt{-\Delta}}\right).$$

Exercise 2.1 Si risolva il seguente integrale:

$$\mathscr{I} = \int \frac{x^3-2x+1}{x^5-16x} dx\,.$$

Svolgimento:

Innanzitutto, notiamo che il grado del denominatore è già maggiore di quello del numeratore, perciò non è necessario fare la divisione tra i due polinomi. Inoltre, notiamo che il denominatore è facilmente scomponibile come segue: $D(x) = x(x+2)(x-2)(x^2+4)$; quindi, seguendo la formula (2.3), la funzione integranda può essere scritta come:

$$\frac{x^3-2x+1}{x^5-16x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+4},$$

con i coefficienti $A, \ldots, E$ da determinare. Svolgendo la somma e identificando i vari termini, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} -16A = 1 \\ 2B-2C+E = \dfrac{1}{2} \\ B+C-D = 0 \\ -2B+2C+E = 1 \\ A+B+C+D = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

la cui soluzione è: $\{A, B, C, D, E\} = \{-\frac{1}{16}, -\frac{3}{64}, \frac{5}{64}, \frac{1}{32}, \frac{3}{4}\}$. Pertanto l'integrale da risolvere si scriverà:

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= -\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x} - \frac{3}{64}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{5}{64}\int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{\frac{1}{32}x+\frac{3}{4}}{x^2+4}\,dx = \\ &= -\frac{1}{16}\log|x| - \frac{3}{64}\log|x+2| + \frac{5}{64}\log|x-2| + \frac{1}{32}\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx + \frac{3}{4}\int\frac{1}{x^2+4}\,dx = \\ &= -\frac{1}{16}\log|x| - \frac{3}{64}\log|x+2| + \frac{5}{64}\log|x-2| + \frac{1}{64}\log(x^2+4) + \frac{3}{16}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \\ &= -\frac{1}{16}\log|x| - \frac{3}{64}\log|x+2| + \frac{5}{64}\log|x-2| + \frac{1}{64}\log(x^2+4) + \frac{3}{8}\arctan\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

■

2.2 L'Integrale Definito

Finora abbiamo introdotto il concetto di "Integrale" semplicemente come "anti-Derivata" e sinonimo di *Primitiva* di una funzione. Qui vogliamo, invece, considerare il cosiddetto "Integrale Definito", darne un'interpretazione *geometrica* e vederne la relazione con la *Derivata*; ciò che costituisce il "Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale".

Definition 2.2.1 — L'Integrale Definito. Sia data una funzione $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ continua[a] in un intervallo $\mathscr{I} = [a, b]$ $(\subseteq \mathscr{D})$, e sia $\mathscr{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x), x \in \mathscr{D}\}$ il suo *Grafico*. Allora definiamo "Integrale Definito" della funzione $f(x)$ tra a e b (detti *estremi di integrazione*) l'area *sottesa* dal grafico tra $x = a$ e $x = b$, cioè l'area racchiusa dal grafico stesso, l'asse delle ascisse $(y = 0)$ e le due rette parallele all'asse delle ordinate $x = a$ e $x = b$, precisando che sono da considerare positive le aree che stanno *"sopra"* l'asse delle ascisse (dove $f(x) > 0$), e negative le altre (dove $f(x) < 0$). Per rappresentare l'integrale definito si usa la seguente simbologia:

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

[a]Nel caso in cui la funzione f presenti punti di discontinuità, è necessario considerare i cosiddetti "Integrali Impropri"; questi saranno discussi più avanti, in (2.3).

Per semplicità, consideriamo una funzione sempre positiva nell'intervallo considerato $[a,\,b]$, e cerchiamo di valutarne l'area sottesa dividendo questo intervallo in N parti uguali di larghezza $\Delta x = (b-a)/N$. In questo modo, l'area è data dalla somma delle aree di N *strisce* di larghezza Δx e altezza data proprio dal valore della funzione nel punto considerato. Più precisamente, potremo scrivere:

$$\mathrm{Area}(f;[a,b]) \equiv \int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_k f(x_k)\,\Delta x = \sum_{k=0}^{N} f(a+k\Delta x)\cdot\Delta x\,.$$

Il valore *esatto* dell'area è ottenibile prendendo il limite per $N\to\infty$, cioè considerando infiniti *rettangoloidi* di larghezza infinitesima ($\Delta x \to dx$):

$$\mathrm{Area}(f;[a,b]) \equiv \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} f(a+k\Delta x)\cdot\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_k f(x_k)\,\Delta x\,.$$

Supponiamo ora di conoscere la *primitiva* $F(x)$ della funzione data $f(x)$, tale che $F'(x) \equiv \frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)$. In tal caso, la nostra area si può scrivere:

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(f;[a,b]) &\equiv \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{x\in[a,b]}\frac{\Delta F}{\Delta x}\cdot\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_k \Delta F(x_k) = \\ &= \lim_{N\to\infty}\{[F(x_1)-F(a)]+[F(x_2)-F(x_1)]+\cdots+[F(x_{N-1})-F(x_{N-2})]+ \\ &\quad +[F(b)-F(x_{N-1})]\} = F(b)-F(a)\,.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Questo risultato rappresenta il:

Theorem 2.2.1 — Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Data una funzione $f(x)$ definita (e continua) nell'intevallo $[a,b]$, sia $F(x)$ una sua *primitiva* (tale cioè che $F'(x) = f(x)$). Allora l'Integrale definito tra a e b (che ne rappresenta l'area sottesa dal grafico in tale intervallo) è dato dalla differenza tra il valore della $F(x)$ calcolato in $x=b$ e in $x=a$:

$$\mathrm{Area}(f;[a,b]) \equiv \int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b \equiv F(b)-F(a)\,.$$

Per lo studente, può anche essere illuminante la seguente argomentazione, in *alternativa* alla precedente. Riprendiamo le aree sottese al grafico della funzione data $f(x)$. Fissiamo arbitrariamente il limite inferiore a dell'intervallo, e prendiamo l'estremo superiore, X, *variabile*. Chiaramente ciò che otteniamo (l'area sottesa tra $x=a$ e $x=X$) è una funzione di X:

$$F(X) =: \int_a^X f(x)\,dx\,,$$

(detta "Funzione Integrale"). Se incrementiamo l'estremo superiore dell'intervallo di ΔX, cioè da X a $X+\Delta X$, la nuova area sottesa sarà data da:

$$F(X+\Delta X) = \int_a^{X+\Delta X} f(x)\,dx\,,$$

cosicché la loro differenza è essenzialmente l'area di una *striscia* di larghezza ΔX ed altezza uguale a $f(X)$:

$$F(X+\Delta X)-F(X)=f(X)\,\Delta X\ ;$$

dividendo ambo i membri per ΔX e prendendo il limite per $\Delta X\to 0$, otteniamo proprio, per definizione di *limite del rapporto incrementale*, la derivata della $F(X)$:

$$\lim_{\Delta X\to 0}\frac{F(X+\Delta X)-F(X)}{\Delta X}\equiv F'(x)=\frac{dF}{dx}=f(x)\ ,$$

risultato che ci conferma quanto detto sopra.

2.2.1 Applicazioni "geometriche"

Diamo adesso qualche semplice applicazione dell'integrale definito, partendo da quelle di carattere *geometrico*.

Exercise 2.2 Si calcoli l'area sottesa al grafico della funzione $y=x^3+2x^2+4x+5$, tra $x=-1$ e $x=2$.

Svolgimento:

Essendo la funzione sempre positiva all'interno dell'intervallo considerato[a], l'area cercata è data dall'integrale:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(x^3+2x^2+4x+5)\,dx &= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^{2} = \\ &= \left(\frac{2^4}{4}+\frac{2}{3}2^3+2\cdot 2^2+5\cdot 2\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}+\frac{2}{3}(-1)^3+2(-1)^2+5(-1)\right)= \\ &= 4+\frac{16}{3}+8+10-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+2-5\right)=\frac{123}{4}\ .\end{aligned} \tag{2.7}$$

■

[a] Infatti, essendo $y'=3x^2+4x+4>0\forall x\in[-1,2]$, la funzione risulta crescente, e poiché $y(x=-1)=2>0$, ne consegue che $y>0\ \forall x\in[-1,2]$.

Exercise 2.3 Si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi a e b è uguale a πab.

Svolgimento:

Si consideri l'equazione dell'ellisse scritta in forma *canonica*, col centro di simmetria nell'origine e i due semiassi paralleli agli assi cartesiani:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

L'area dell'intero ellisse sarà il quadruplo dell'area racchiusa nel Primo Quadrante ($x\geq 0\ ,\ y\geq 0$) tra gli assi cartesiani e la curva: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, e cioè:

$$[\text{Area Ellisse}]\ =4\,\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx;$$

Utilizzando il risultato dato nel quarto esempio in (2.1), otteniamo:

$$\begin{aligned}[\text{Area Ellisse}] &= 4\,\frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}-a^2\arccos\left(\frac{x}{a}\right)\right]\right]_0^a = \\ &= 2\,\frac{b}{a}\,a^2\arccos(0) = \pi\,a\,b\,, \qquad (c.v.d.)\,.\end{aligned} \tag{2.8}$$

■

2.2.2 Applicazioni "fisiche"

Nel primo esercizio in (1.3.6) abbiamo visto che la velocità $v = \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ non è altro che la derivata dello spazio rispetto al tempo, e, analogamente, l'accelerazione $a = \dot{v} = \ddot{x}$ è la derivata della velocità rispetto al tempo. Visto che l'integrale è essenzialmente l'*operazione* inversa della derivata, potremo allora dire che: $v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v(t)\,dt$, e quindi, integrando tra l'istante iniziale $t = 0$ (a cui corrisponde una *posizione* iniziale x_0) ed il generico istante t (a cui corrisponde la generica posizione $x(t)$), otteniamo la cosiddetta "Legge Oraria":

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = x(t) - x_0 = \int_0^t v(t)\,dt\;.$$

Allo stesso modo, possiamo integrare l'accelerazione a per ottenere la velocità ad un generico istante t, sapendo che la *velocità iniziale* è $v(t=0) = v_0$:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = v(t) - v_0 = \int_0^t a(t)\,dt\;.$$

Vediamone un esempio esplicito, simile a quello dato in (1.3.6):

Exercise 2.4 Un punto materiale di massa unitaria ($m = 1$) e vincolato a muoversi su una retta orizzontale, è sottoposto all'azione di una forza variabile (sempre diretta lungo lo stesso asse) data da: $F(t) = (2t^3 - 3t^2 + 5t + 4)$; se ne determini la *Legge Oraria* $x(t)$, sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ il punto materiale si trovava nel punto $x(t=0) = x_0 = 2$, con una velocità $v(t=0) = v_0 = 3$.

Svolgimento:

Essendo la massa unitaria, dalla Legge di Newton, $F = m\,a$, troviamo che l'accelerazione a è data da:

$$a(t) = \dot{v}(t) \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{F(t)}{m} = (2t^3 - 3t^2 + 5t + 4)\,,$$

da cui, integrando, possiamo ottenere la legge che descrive come varia la velocità in funzione del tempo:

$$\int_{v_0=3}^{v(t)} dv = \int_0^t (2t^3 - 3t^2 + 5t + 4)\,dt \;\Rightarrow \tag{2.9}$$

$$v(t) - 3 = \left[\frac{1}{2}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 4t\right]_0^t = \left(\frac{1}{2}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 4t\right)\,, \tag{2.10}$$

da cui:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{2}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 4t + 3\right) ;$$

integrando di nuovo, sempre tra $t = 0$ (in cui $x = x_0 = 2$) e il generico istante t, si ottiene così la "Legge Oraria" cercata:

$$\int_{x_0=2}^{x(t)} dx = \int_0^t \left(\frac{1}{2}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 4t + 3\right) dt \Rightarrow \tag{2.11}$$

$$x(t) - 2 = \left[\frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{6}t^3 + 2t^2 + 3t\right]_0^t = \left(\frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{6}t^3 + 2t^2 + 3t\right) , \tag{2.12}$$

e quindi, in definitiva:

$$x(t) = \left(\frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{6}t^3 + 2t^2 + 3t + 2\right) .$$

■

■ **Example 2.2 — Lavoro ed Energia Potenziale.** Come si è visto in (1.20), ad ogni forza conservativa F è associabile un'Energia Potenziale U, ottenibile dall'integrazione della forza stessa[1]:

$$U(a) - U(b) = -\int_b^a F(x)\, dx .$$

Ricordiamo che l'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria, fatto che non dovrebbe sorprendere, visto che, a meno del segno, la U non è altro che la *Primitiva* della forza F.

Come esempio, consideriamo la forza elastica esercitata da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo l_0, descritta dalla ben nota Legge di Hooke: $F(x) = -K(x - l_0)$; in questo caso l'energia potenziale associata è data da:

$$U(x) - U(l_0) = -\int_{l_0}^x [-K(x - l_0)]\, dx \equiv K \int_0^{x-l_0} \xi\, d\xi = K \left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^{x-l_0} = \frac{1}{2} K (x - l_0)^2 ,$$

ovvero, *scegliendo* $U(l_0) = 0$, otteniamo il ben noto risultato:

$$U(x) = \frac{1}{2} K (x - l_0)^2 .$$

■

2.3 L'Integrale Improprio

Finora abbiamo assunto che la funzione integranda $f(x)$ fosse continua nell'intervallo di integrazione $[a, b]$, e che questo intervallo fosse *limitato* (cioè, che a e b fossero entrambi *finiti*). Quando queste ipotesi non sono valide, parliamo di "Integrale Improprio". Più precisamente, esistono due tipi di integrali impropri:

[1] Ripeto che, in questa trattazione elementare ed introduttiva, ci limitiamo a considerare solo casi unidimensionali.

Definition 2.3.1 — Integrale Improprio del Primo Tipo. Se all'interno dell'intervallo *finito* di integrazione $[a,b]$ esiste un punto di non-esistenza della funzione integranda (cioè un punto $x_0 \notin \mathscr{D}$), allora la $f(x)$ stessa si dice integrabile in senso improprio in $[a,b]$ se esiste (finito) il seguente limite:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right);$$

la generalizzazìone a più punti di discontinuità è immediata.

Definition 2.3.2 — Integrale Improprio del Secondo Tipo. Se almeno uno dei due estremi di integrazione si estende all'infinito, per esempio $b \to +\infty$, allora diremo che la $f(x)$ è integrabile in senso improprio se esiste (finito) il seguente limite:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Diamo un esempio per ciascuno:

■ **Example 2.3** Si calcoli il seguente integrale improprio (del Primo Tipo):

$$\mathscr{I} = \int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx\,.$$

Secondo la definizione data sopra si ha:

$$\begin{aligned}
\mathscr{I} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{x-1}\,dx + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x-1}\,dx\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left([\log(1-x)]_0^{1-\varepsilon} + [\log(x-1)]_{1+\varepsilon}^2\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\log(1-1+\varepsilon) - \log 1 + \log 1 - \log(1+\varepsilon-1)] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\log\varepsilon - \log\varepsilon) = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

■

■ **Example 2.4** Si calcoli il seguente integrale improprio (del Secondo Tipo):

$$\mathscr{J} = \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

Qesta volta scriveremo:

$$\begin{aligned}
\mathscr{J} &= \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}[\arctan x]_1^M = \lim_{M\to+\infty}(\arctan M - \arctan 1) = \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

■

3. Le Equazioni Differenziali

Una comune equazione algebrica, nella *funzione* incognita $y(x)$, ha la generica forma $f(y;x)=0$. Un esempio potrebbe essere l'equazione $(x^2+1)\,y-(3x+2)=0$, la cui *soluzione* è semplicemente: $y(x)=\frac{3x+2}{x^2+1}$. Un'equazione in cui, invece, la *funzione* incognita $y(x)$ compare anche sotto forma delle sue derivate y', y'', ..., $y^{(n)}$, è detta "Equazione Differenziale" (di n-esimo ordine, se la massima derivata presente nell'equazione è quella n-esima). Potremo quindi dire che la generica equazione differenziale di n-esimo ordine può essere scritta $f(y,y',y'',\ldots,y^{(n)};x)=0$. Poiché risolvere un'equazione di questo tipo significa *integrare* n volte, e, come si è visto nel capitolo precedente, ad ogni integrazione si deve aggiungere una costante arbitraria, cìò implica che la sua "Soluzione *Generale*" sarà sempre definita a meno di n costanti di integrazione arbitrarie. Per poter avere una *unica* soluzione, occorre aggiungere n "condizioni al contorno", cioè il valore che $y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}$ assumono in un punto assegnato x_0. In questo caso, si parla di "Problema di Cauchy". Il più semplice, direi *banale*, tipo di equazione differenziale del Primo Ordine è proprio l'integrale. Chiedere di calcolare il generico integrale $y(x)=\int f(x)dx$, ovvero di trovare la *primitiva* della $f(x)$, è equivalente a cercare la "Soluzione Generale" dell'eq. differenziale $y'-f(x)=0$, che in effetti si scriverebbe proprio: $y(x)=\int f(x)\,dx+C$, (con C costante arbitraria). Tralasciando quindi questo *banale* tipo di equazioni (i comuni integrali), inizieremo col trattare alcuni semplici generi di eq. differenziali del Primo Ordine, quelle "a variabili separabili", quelle "lineari" e quelle dette "di Bernoulli".

3.1 Equazioni differenziali del Primo Ordine

3.1.1 Equazioni differenziali a Variabili Separabili

Un'equazione differenziale del Primo Ordine in cui la funzione incognita $y(x)$ e la variabile indipendente x si possano *separare* è detta "a variabili separabili"; la sua generica forma può essere scritta come:

$$y'=A(x)\,B(y)\,,$$

dove $A(x)$ e $B(y)$ sono funzioni arbitrarie. Essendo $y'\equiv\frac{dy}{dx}$, troviamo che la sua soluzione generale è:

$$\int\frac{dy}{B(y)}=\int A(x)\,dx+C\,.$$

Vediamone un paio di esempi:

■ **Example 3.1** Si risolva la seguente equazione differenziale:

$$x\,y' - (y^2+1)\,(x^2-1)\; = 0\,. \tag{3.1}$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili; la sua soluzione *generale* si ottiene come segue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y^2+1} &= \int \frac{x^2-1}{x}\,dx + C \quad \Rightarrow \\
\arctan y &= \frac{x^2}{2} - \log|x| + C \quad \Rightarrow \\
y(x) &= \tan\left(\frac{x^2}{2} - \log|x| + C\right)\,.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

■

■ **Example 3.2** Si risolva il seguente Problema di Cauchy (cioè, si risolva la seguente eq. differenziale, soggetta alla condizione al contorno data):

$$\begin{cases} y'\cos x - (y^2+1)\;\sin x = 0\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

Si tratta nuovamente di un'eq. differenziale a variabili separabili. Questa volta, però, essendo un problema di Cauchy (con la condizione al contorno), potremo trovarne l'unica soluzione. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \tan x\,dx + C \;\Rightarrow\; \arctan y = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx + C = -\log|\cos x| + C \;\Rightarrow \\
&\qquad\Rightarrow\; y(x) = \tan\left(C - \log|\cos x|\,\right)\,.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Questa è la *Soluzione Generale* dell'equazione. Imponiamo quindi la condizione al contorno data ($y(0) = 1$) per trovare il valore da assegnare alla costante di integrazione C:

$$y(0) = \tan\left(C - \log|cos(0)|\right) = \tan(C) = 1 \;\Rightarrow\; C = \frac{\pi}{4}\,.$$

Quindi, la soluzione (*unica*) finale del problema è la seguente:

$$y(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \log|\cos x|\right)\,.$$

■

3.1.2 Equazioni differenziali Lineari del Primo Ordine

Definition 3.1.1 — Equazioni differenziali lineari. Un'equazione differenziale (di qualsiasi ordine) è detta "Lineare" se è lineare rispetto alla funzione incognita $y(x)$ e a tutte le sue derivate.

Lasciando la trattazione generale delle equazioni differenziali lineari di qualsiasi ordine al paragrafo (3.2), qui vogliamo considerare solo quelle del Primo Ordine, la cui forma generica può scriversi:

$$A(x)\,y' + B(x)\,y + C(x) = 0\,,$$

con $A(x)$ $(\neq 0)$, $B(x)$ e $C(x)$ funzioni arbitrarie di x. Conviene riscrivere questa equazione come:

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,. \tag{3.5}$$

Possiamo trovarne la formula risolutiva generale come segue. Moltiplichiamo l'intera equazione per il fattore: $e^{\int P(x)\,dx}$, così da ottenere:

$$y'\, e^{\int P(x)\,dx} + P(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, y = Q(x)\;\; e^{\int P(x)\,dx}\,.$$

Il membro a sinistra non è altro che la derivata del prodotto $y\, e^{\int P(x)\,dx}$, cosicché, integrando, si ha:

$$y\, e^{\int P(x)\,dx} = \int e^{\int P(x)\,dx}\, Q(x)\,dx + C\,,$$

ovvero, in definitiva:

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \left(\int e^{\int P(x)\,dx}\, Q(x)\,dx + C \right)\,. \tag{3.6}$$

Vediamone un esempio:

■ **Example 3.3** Si risolva il seguente Problema di Cauchy (cioè, si risolva la seguente eq. differenziale, soggetta alla condizione al contorno data):

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x+1} = \sin x\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Applicando la formula appena dimostrata (3.6), si ottiene:

$$\begin{aligned} & y e^{\int \frac{dx}{x+1}} = \int e^{\int \frac{dx}{x+1}} \sin x\, dx + C \;\;\Rightarrow \\ \Rightarrow\;\; & y\,(x+1) = \int (x+1)\,\sin x\,dx + C = -(x+1)\,\cos x + \int \cos x\,dx + C = \\ & = \sin x - (x+1)\,\cos x + C\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

dove, vista la condizione al contorno posta in $x = 0$, ci siamo limitati a considerare solo la soluzione valida per $x > -1$. La soluzione generale è quindi data dalla seguente espressione:

$$y(x) = \frac{C + \sin x}{x+1} - \cos x\,.$$

La soluzione definitiva si ottiene imponendo che $y(0) = 0$:

$$y(0) = C - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad C = 1\,,$$

da cui:

$$y(x) = \frac{1 + \sin x}{x+1} - \cos x\,.$$

■

Example 3.4 — Un'applicazione "Fisica": La Carica del Condensatore. Come è noto dalle leggi dell'elettromagnetismo, l'equazione che descrive il processo di carica di un condensatore di *Capacità* C, inizialmente scarico (carica iniziale $q(t=0)=0$), connesso con una pila di *tensione* costante V_0 ed una *resistenza* R è la seguente:

$$V_0 = RI + \frac{q}{C},$$

dove $I = \dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$ è l'intensità della corrente elettrica. Questa è, per l'appunto, un'equazione differenziale lineare del primo ordine in $q(t)$:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{V_0}{R}.$$

Applicando la formula (3.6) si ottiene la sua *Soluzione Generale*:

$$\begin{aligned} q(t)\,e^{\int \frac{dt}{RC}} &= \int e^{\int \frac{dt}{RC}} \frac{V_0}{R}\,dt + K \quad \Rightarrow \\ q(t)\,e^{\frac{t}{RC}} &= \frac{V_0}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}\,dt + K = CV_0\,e^{\frac{t}{RC}} + K \quad \Rightarrow \\ q(t) &= CV_0 + K\,e^{-\frac{t}{RC}}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

dove si è indicato con K la costante d'integrazione, per non confonderla con la *Capacità* del condensatore. Imponendo quindi a questa soluzione la condizione *iniziale*: $q(0) = CV_0 + K = 0 \ \Rightarrow \ K = -CV_0$, si arriva alla soluzione cercata:

$$q(t) = CV_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

■

3.1.3 L'Equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli è un'equazione differenziale del Primo Ordine che si può scrivere nella seguente forma:

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n\,, \qquad (n \in \mathbb{R}, n \neq 0,\,1). \tag{3.10}$$

Questa equazione si può ridurre a quella lineare del tipo (3.5) cambiando variabile, ponendo $y = z^{\alpha}$ per un'opportuna scelta del parametro α. Infatti con questa sostituzione l'equazione data diventa:

$$\alpha\,z^{\alpha-1}\,z' + P(x)\,z^{\alpha} = Q(x)\,z^{n\alpha},$$

ovvero:

$$z' + \frac{P(x)}{\alpha}\,z = \frac{Q(x)}{\alpha}\,z^{(n-1)\alpha+1};$$

scegliendo quindi: $\alpha = \frac{1}{1-n}$ si ottiene la seguente equazione lineare:

$$z' + \hat{P}(x)\,z = \hat{Q}(x),$$

dove si è posto: $\hat{P}(x) = (1-n)\,P(x)$, e $\hat{Q}(x) = (1-n)\,Q(x)$. Questa è risolvibile applicando di nuovo la formula (3.6); ottenuta così la soluzione generale per la variabile $z(x)$, possiamo infine trovare la soluzione cercata per $y(x)$ $\left(= [z(x)]^{\frac{1}{1-n}}\right)$.
Vediamone un esempio:

■ **Example 3.5** Si risolva il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = \sqrt[3]{y}\,(x+1)\,, \\ y(1) = 0\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Ponendo $y = z^\alpha$ (cosicché: $y' = \alpha\, z^{\alpha-1}\, z'$) l'equazione data diventa:

$$\alpha\, z^{\alpha-1} z' + \frac{z^\alpha}{x} = z^{\alpha/3}\,(x+1)\,,$$

ovvero:

$$z' + \frac{1}{\alpha x} z = \frac{1}{\alpha} z^{1-\frac{2\alpha}{3}}\,(x+1)\,.$$

La scelta $\alpha = \frac{3}{2}$ porta quindi alla seguente eq. lineare:

$$z' + \frac{2}{3x} z = \frac{2}{3}\,(x+1)\,,$$

risolvibile applicando la formula (3.6); troviamo così:

$$\begin{aligned} z\, e^{\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x}} &= \int e^{\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x}}\, \frac{2}{3}\,(x+1)\,dx + C \quad \Rightarrow \\ z\, x^{2/3} &= \frac{2}{3}\int x^{2/3}\,(x+1)\,dx + C = 2x^{5/3}\left(\frac{1}{5}+\frac{x}{8}\right) + C \quad \Rightarrow \\ z(x) &= 2x\left(\frac{1}{5}+\frac{x}{8}\right) + \frac{C}{x^{2/3}}\,, \end{aligned} \tag{3.12}$$

da cui, essendo $y(x) = z^\alpha \equiv z^{3/2}$, possiamo ottenere la *Soluzione Generale* per l'originaria variabile y:

$$y(x) = \left[2x\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}x\right) + \frac{C}{x^{2/3}}\right]^{3/2}.$$

A questa soluzione possiamo imporre la condizione al contorno data:

$$y(1) = \left(\frac{13}{20}+C\right)^{3/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{13}{20}\,.$$

In questo modo possiamo scrivere la soluzione finale del problema:

$$y(x) = \frac{1}{40\sqrt{5}}\left(8x + 5x^2 - \frac{13}{x^{2/3}}\right)^{3/2}.$$

■

3.2 Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Costanti di ordine n

In questa *Sezione* vogliamo studiare le equazioni differenziali lineari di qualsiasi ordine, ma a coefficienti costanti, cioè le equazioni del tipo:

$$A_n\, y^{(n)}(x) + A_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + A_2\, y''(x) + A_1\, y'(x) + A_0\, y(x) \;= f(x)\,, \tag{3.13}$$

dove i coefficienti A_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ sono delle costanti reali, e $f(x)$, detto “termine noto”, è una funzione arbitraria della variabile x. Per poter procedere è necessario definire l’eq. (differenziale) “Omogenea” associata alla (3.13), semplicemente come l’eq. che si ottiene annullando il *termine noto* $f(x)$:

$$A_n y^{(n)}(x) + A_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + A_2 y''(x) + A_1 y'(x) + A_0 y(x) = 0\,. \qquad (3.14)$$

La sua soluzione sarà indicata generalmente con $y_o(x)$, per distinguerla dalla soluzione $y(x)$ dell’eq. *completa* (3.13). Conviene anche definire il generico operatore differenziale associato all’eq.(3.13), come:

$$L =: A_n D^{(n)} + A_{n-1} D^{(n-1)} + \cdots + A_2 D^2 + A_1 D + A_0$$

(essendo $D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}$ l’operatore della derivata k-esima), cosicché l’eq. data e la sua omogenea associata possono scriversi in modo compatto come: $L(y) = f(x)$, e $L(y_o) = 0$, rispettivamente. Naturalmente, per le ragioni dette precedentemente, entrambe le soluzioni generali della (3.13) e della (3.14) conterranno n costanti di integrazione arbitrarie. A questo punto possiamo fare due importanti osservazioni:

1. Qualsiasi combinazione lineare di soluzioni dell’omogenea associata, è ancora una sua soluzione. Infatti, siano y_{o1}, $y_{o2}, \dots, y_{ok}$, k soluzioni della (3.14), tali cioè che $L(y_{o1}) = L(y_{o2}) = \cdots = L(y_{ok}) = 0$, allora, per la *linearità* dell’operatore L avremo che:

$$L(c_1 y_{o1} + c_2 y_{o2} + \cdots + c_k y_{ok}) \equiv L\left(\sum_{i=1}^{k} c_i y_{oi}\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i L(y_{oi}) = 0\,,$$

come volevasi dimostrare. L’altra osservazione è la seguente:

2. La “Soluzione Generale” dell’eq. *completa* (3.13) si può sempre scrivere come somma della Soluzione Generale $y_o(x)$ dell’eq. omogenea associata (3.14) e di una *“Soluzione Particolare”* $y_P(x)$ della stessa eq, completa (3.13). Infatti, è facile verificare che $y(x) = y_o(x) + y_P(x)$ ne è soluzione:

$$L(y) = L(y_o + y_P) = L(y_0) + L(y_P) = 0 + f(x) = f(x)\ .$$

Date queste premesse, possiamo quindi dare le regole che ci permettono di risolvere la generica eq. differenziale del tipo (3.13). Si deve iniziare col cercare la Soluzione Generale della sua eq. omogenea associata (3.14). A tal fine si definisce “equazione caratteristica” associata all’eq. differenziale data, l’equazione (algebrica) di grado n che si ottiene sostituendo nella (3.14) una variabile algebrica (λ^k) alla *Derivata* k-esima, cioè l’eq.:

$$\mathscr{P}(\lambda) =: A_n \lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0\,.$$

Per il “Teorema Fondamentale dell’Algebra”, questa equazione ammetterà sempre *radici*, reali o complesse coniugate, distinte o no. Sia λ_i l’i-esima radice, e sia m_i la sua *molteplicità algebrica*. Allora, la soluzione generale dell’eq. omogenea (3.14) si può scrivere come:

$$y_o(x) = \sum_{i=1}^{r} Q_i^{(m_i-1)}(x)\, e^{\lambda_i x}\,,$$

dove i $Q_i^{(m_i-1)}(x)$ rappresentano generici polinomi di grado $m_i - 1$ in x. Si precisa altresì che, poiché l’equazione data è *reale*, le eventuali radici *complesse* $\lambda_i = \alpha \pm i\beta$ danno luogo a termini contenenti le funzioni reali trigonometriche del *seno* e del *coseno*[1]. Per chiarire quanto detto, prendiamo per esempio il caso delle equazioni lineari omogene del secondo ordine:

$$A\,y'' + B\,y' + C\,y = 0\,, \tag{3.15}$$

la cui eq. caratteristica è quindi:

$$A\,\lambda^2 + B\,\lambda + C = 0\,. \tag{3.16}$$

Questa avrà due radici reali distinte ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$) se $\Delta \equiv B^2 - 4AC > 0$, un'unica radice rale λ di molteciplicità 2 se $\Delta = 0$, ed infine due radici complesse coniugate ($\lambda_{1,(2)} = \alpha \pm i\,\beta$) se $\Delta < 0$. Avremo quindi i seguenti tre casi:

1.

$$\Delta > 0\ : \qquad y_o(x) = C_1\,e^{\lambda_1 x} + C_2\,e^{\lambda_2 x}\,, \tag{3.17}$$

2.

$$\Delta = 0\ : \qquad y_o(x) = (C_1 + C_2\,x)\,e^{\lambda x}\,, \tag{3.18}$$

3.

$$\begin{aligned}\Delta < 0\ : \qquad y_o(x) &= \tilde{C}_1\,e^{\lambda_1 x} + \tilde{C}_2\,e^{\lambda_2 x} \ = \\ &= e^{\alpha x}\,(\tilde{C}_1\,e^{i\beta x} + \tilde{C}_2\,e^{-i\beta x}) \ = \\ &= e^{\alpha x}\,(C_1\,\sin\beta x + C_2\,\cos\beta x)\,,\end{aligned} \tag{3.19}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti di integrazione. Nel 3 ($\Delta < 0$), come già detto, useremo direttamente l'ultima forma data, essendo interessati solo a funzioni reali.

Vediamo un esempio di equazione di ordine superiore attraverso il seguente esercizio:

Exercise 3.1 Si determini la soluzione generale della seguente equazione differenziale lineare omogenea:

$$y_o^{(IV)} - 16\,y_o = 0\,.$$

Svolgimento:

L'eq. caratteristica $\lambda^4 - 16 = 0$ ha quattro radici distinte, di cui due reali ($\lambda_{1,2} = \pm 2$) e due complesse coniugate ($\lambda_{3,4} = \pm 2\,i$). Pertanto la sua soluzione generale può scriversi:

$$y_o(x) = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-2x} + C_3\,\sin 2x + C_4\,\cos 2x\,.$$

■

3.2.1 Equazione non-omogenea (Prima Parte)

Nel caso in cui l'eq. differenziale data sia non-omogenea, abbiamo già mostrato che la soluzione generale poò sempre essere scritta come somma della *soluzione generale della sua omogenea associata* ($y_o(x)$) e di una *soluzione* (o "integrale") *particolare*, $y_p(x)$. Avendo visto come ottenere in generale $y_o(x)$, non ci resta che vedere come ottenere $y_p(x)$, la cui forma evidentemente

[1] Ciò, in virtù delle *Formule di Eulero*, secondo cui $e^{\alpha \pm i\beta} = e^{\alpha}\,(\cos\beta \pm i\,\sin\beta)$.

dipende dalla struttura del termine noto $f(x)$. Per il momento ci limteremo al caso in cui $f(x)$ è della forma:

$$f(x) = \mathscr{S}^{(p)}(x) \cdot e^{hx} , \tag{3.20}$$

con $\mathscr{S}^{(p)}(x)$ un generico polinomio in x di grado p; il fattore e^{hx} include, oltre al caso in cui sia effettivamente presente un termine "esponenziale" ($h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$), i casi in cui questo sia assente ($h = 0$) ed i casi in cui siano presenti le funzioni trigonometriche: $\sin \gamma x$, $\cos \gamma x$, (corrispondenti a $h = \pm i\gamma$). Nel prossimo paragrafo vedremo come talvolta sia possibile ottenere una soluzione particolare anche in casi in cui il termine noto $f(x)$ non abbia la semplice forma data in (3.20), utilizzando il cosiddetto metodo "della variazione delle costanti arbitrarie".

Proposition 3.2.1 Data un'eq. differenziale lineare non-omogenea di termine noto $f(x)$ della forma (3.20), una *soluzione particolare* $y_p(x)$ può essere espressa come:

$$y_p(x) = \mathscr{Q}^{(p)}(x) \cdot x^r \, e^{hx} , \tag{3.21}$$

dove $\mathscr{Q}^{(p)}(x)$ è un polinomio dello stesso grado (p) di quello presente nel termine noto ($\mathscr{S}^{(p)}(x)$), ed r è la *molteplicità algebrica* dell'eventuale radice dell'eq. caratteristica coincidente con h (*reale* o *complessa* che sia); naturalmente, se $h \neq \lambda_i \;\; \forall \, i$, allora $r = 0$. I coefficienti del polinomio $\mathscr{Q}^{(p)}(x)$ vanno determinati imponendo che la $y_p(x)$ data nella (3.21) soddisfi in effetti l'eq. completa (3.13).

Proposition 3.2.2 Prima di vedere in pratica, con qualche esempio significativo, come si procede, è utile notare che quando il *termine noto* $f(x)$ è somma di più termini di tipo diverso, diciamo $f(x) = \sum_s f_s(x)$, è sufficiente trovare le soluzioni particolari corrispondenti a ciascuno di questi termini, e poi sommarle. Vediamo perché. Si scriva l'eq. differenziale data nella forma:

$$L(y(x)) = \sum_s f_s(x) ,$$

Trovata la soluzione generale $y_o(x)$ della sua eq. *omogenea associata* ($L(y_o) = 0$), seguendo le prescrizioni date in precedenza, si pone il problema della ricerca della soluzione particolare $y_p(x)$. Sia allora $y_{p,s}$ la soluzione particolare dell'eq. $L(y_{p,s}) = f_s(x)$. È immediato verificare che la somma di tutte queste soluzioni particolari, $y_p(x) = \sum_s y_{p,s}$, soddisfa l'eq. *completa* (in virtù della linearità dell'operatore differenziale L):

$$L(y_p) = L \sum_s y_{p,s} = \sum_s L(y_{p,s}) = \sum_s f_s(x) \equiv f(x) .$$

I prossimi esempi ed esercizi, in qualche modo ordinati secondo il grado di difficoltà crescente, dovrebbero chiarire almeno le principali casistiche che si possono presentare nei problemi applicativi.

Exercise 3.2 Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)\, e^{-x} , \\ y(0) = 0 , \\ y'(0) = 0 . \end{cases} \tag{3.22}$$

Svolgimento:
Iniziamo col cercare la soluzione generale dell'eq. omogenea associata: $y_o'' - 3y_o' + 2y_o =$

0 . L'eq. caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ammette due radici reali distinte (ciascuna di molteplicità 1): $\lambda_1 = 1$ $(m_1 = 1)$ e $\lambda_2 = 2$ $(m_2 = 1)$; quindi la soluzione dell'omogenea può scriversi:

$$y_o(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{2x} \,.$$

Poiché il termine noto è del tipo $f(x) = \mathscr{S}^{(2)}(x)\, e^{hx}$, con $h = -1 \neq \lambda_{1,2}$, secondo quanto detto nella "Proposizione" (3.2.1), una soluzione particolare avrà pure la stessa forma:

$$y_p(x) = (a x^2 + b x + c)\, e^{-x} \,;$$

imponendo che questa soddisfi l'eq. (completa) data in (3.22), possiamo determinare i coefficienti a, b, c del polinomio; si ha:

$$y'_p = (2ax + b - ax^2 - bx - c)\, e^{-x} \,, \tag{3.23}$$
$$y''_p = (2a - 2ax - b - 2ax - b + ax^2 + bx + c)\, e^{-x} \,; \tag{3.24}$$

sostituendo quindi nell'eq. in (3.22) ed uguagliando i termini corrispondenti si arriva al seguente sistema:

$$\begin{cases} 6a = 1 \,, \\ -10a + 6b = 0 \,, \\ 2a - 5b + 6c = 1 \,, \end{cases} \tag{3.25}$$

la cui risoluzione dà: $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{5}{18}$, $c = \frac{37}{108}$. Pertanto la soluzione particolare trovata è:

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{6} x^2 + \frac{5}{18} x + \frac{37}{108} \right)\, e^{-x} \,.$$

Potremo quindi scrivere finalmente la soluzione generale dell'eq. data come somma di $y_o(x)$ e di $y_p(x)$:

$$y(x) \equiv y_o(x) + y_p(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{2x} + \left(\frac{1}{6} x^2 + \frac{5}{18} x + \frac{37}{108} \right)\, e^{-x} \,.$$

Essendo un problema di Cauchy possiamo infine determinare il valore da assegnare alle costanti di integrazione C_1 e C_2 imponendo le *condizioni al contorno* date in (3.22):

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + \frac{37}{108} = 0 \,, \\ y'(0) &= C_1 + 2C_2 + \frac{5}{18} - \frac{37}{108} = 0 \,, \end{aligned} \tag{3.26}$$

da cui si ottiene: $C_1 = -\frac{3}{4}$ e $C_2 = \frac{11}{27}$. La soluzione del problema di Cauchy (3.22) è quindi la seguente:

$$y(x) = -\frac{3}{4}\, e^x + \frac{11}{27} e^{2x} + \left(\frac{1}{6} x^2 + \frac{5}{18} x + \frac{37}{108} \right)\, e^{-x} \,.$$

■

Exercise 3.3 Si risolva la seguente equazione differenziale:

$$y''' - y'' = (x^2 - 1)\,. \tag{3.27}$$

Svolgimento:

In questo caso, l'equazione *Omogenea* associata: $y_o''' - y_o'' = 0$, porta alla seguente *equazione caratteristica*: $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$, ovvero $\lambda^2(\lambda - 1) = 0$, le cui radici sono: $\lambda_1 = 0$ (con molteplicità $m_1 = 2$) e $\lambda_2 = 1$ (con molteplicità $m_2 = 1$). La soluzione generale dell'omogenea è pertanto data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} y_o(x) &= (C_1 + C_2\,x)\,e^{\lambda_1 x} + C_3\,e^{\lambda_2 x} = \\ &= C_1 + C_2\,x + C_3\,e^x\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Qui bisogna fare attenzione a scrivere la "Soluzione Particolare"; infatti, confrontando il *termine noto*: $f(x) = (x^2 - 1)$, con la forma generale qui considerata data in (3.20), vediamo che $\mathscr{S}^{(p)}(x)$, è un polinomio di secondo grado, e che $h = 0$ (visto che in $f(x)$ non c'è alcun esponenziale, né reale né complesso), proprio coincidente con una delle radici dell'eq. caratteristica: λ_1, di molteplicità $m_1 = 2$. Pertanto, in accordo con la formula (3.21), la *Soluzione Particolare* avrà la forma:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \mathscr{Q}^{(2)}(x)\cdot x^2\,e^{0\cdot x} = \\ &= (a\,x^2 + b\,x + c)\,x^2 = (a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2)\,, \end{aligned} \tag{3.29}$$

(essendo $r = m_1 = 2$). Dobbiamo adesso imporre che questa soluzione soddisfi l'equazione completa (3.27). Se ne calcolano quindi le prime tre derivate:

$$\begin{cases} y_p' = 4\,a\,x^3 + 3\,b\,x^2 + 2\,c\,x\,, \\ y_p'' = 12\,a\,x^2 + 6\,b\,x + 2\,c\,, \\ y_p''' = 24\,a\,x + 6\,b\,; \end{cases} \tag{3.30}$$

sostituendo nell'eq. completa e identificando i vari termini si arriva così a determinare i coefficienti incogniti, che risultano essere: $\{a, b, c\} = \{-\frac{1}{12}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}$. La *Soluzione Particolare* può allora essere scritta come:

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)\,x^2\,.$$

Sommando questa alla soluzione $y_o(x)$ dell'omogenea associata data nella (3.28), si ottiene in definitiva la soluzione cercata:

$$y(x) = C_1 + C_2\,x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + C_3\,e^x\,.$$

■

Exercise 3.4 Si risolva il seguente "Problema di Cauchy":

$$\begin{cases} y'' + 4y = (x+1)\sin x\,, \\ y(0) = 0\,, \\ y'(0) = 0\,. \end{cases} \tag{3.31}$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata è $y_o'' + 4y_o = 0$, a cui corrisponde l'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$ che ha due radici complesse coniugate: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, entrambe di molteplicità algebrica pari a uno ($m_1 = m_2 = 1$). Questo significa, per quanto detto in (3.19), che la soluzione generale dell'omogenea possa essere scritta in una delle seguenti forme:

$$\begin{aligned} y_o(x) &= \tilde{C}_1\, e^{2ix} + \tilde{C}_2\, e^{-2ix} = \\ &= C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)\,. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Passiamo quindi alla ricerca della "soluzione particolare"; in questo esercizio il termine noto è dato dal prodotto di un polinomio di 1° grado per una funzione trigonometrica, ma quest'ultima è, in virtù delle formule di Eulero, come se fosse una combinazione lineare di esponenziali complessi: $\sin x \sim e^{\pm ix}$; in altre parole, facendo riferimento alla forma generale (3.20), vediamo che $h = \pm i$, ed è quindi diverso dalle due radici dell'eq. caratteristica ($\lambda_{1,2} = \pm 2i$). Di conseguenza, in accordo con quanto indicato nella *Proposizione* (3.2.1), la *Soluzione Particolare* y_p potrà essere scritta come prodotto di un polinomio dello stesso grado del polinomio presente nel termine noto (di 1° grado) per un'esponenziale contenente nell'esponente lo stesso valore di h, che però in questo caso potrebbe essere sia $+i$ che $-i$, e quindi sia la funzione $\sin x$ che la funzione $\cos x$. In concreto, possiamo porre:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \tilde{\mathscr{Q}}_+^{(1)}(x)\, e^{ix} + \tilde{\mathscr{Q}}_-^{(1)}(x)\, e^{-ix} = \\ &= \mathscr{Q}_s^{(1)}(x)\,\sin x + \mathscr{Q}_c^{(1)}(x)\,\cos x = \\ &= (ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x)\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

I coefficienti $\{a, b, c, d\}$ vanno determinati imponendo che $y_p(x)$ risolva in effetti l'eq. completa data; calcoliamoci quindi la sua derivata prima e la sua derivata seconda:

$$\begin{cases} y_p' = \cdots = (ax+b+c)\cos x + (a - cx - d)\sin x\,, \\ y_p'' = \cdots = -(ax+b+2c)\sin x + (2a - cx - d)\cos x\,. \end{cases} \tag{3.34}$$

Sostituendo nell'eq. completa troviamo:

$$-(ax+b+2c)\sin x + (2a-cx-d)\cos x + (4ax+4b)\sin x + (4cx+4d)\cos x = (x+1)\sin x\,.$$

Identificando i vari termini otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3a = 1\,, \\ 3b - 2c = 1\,, \\ 3c = 0\,, \\ 3d + 2a = 0\,, \end{cases} \tag{3.35}$$

la cui soluzione è: $\{a, b, c, d\} = \{\frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ 0\,,\ -\frac{2}{9}\}$. La *Soluzione Particolare* è quindi:

$$y_p(x) = \frac{1}{3}\,(x+1)\,\sin x - \frac{2}{9}\,\cos x\,,$$

che sommata alla $y_o(x)$ data nella (3.32) porta alla seguente soluzione generale:

$$y(x) = C_1\,\sin 2x + C_2\,\cos 2x + \frac{1}{3}\,(x+1)\,\sin x - \frac{2}{9}\,\cos x\,.$$

A questa vanno infine imposte le *condizioni iniziali* date. Si ottiene così:

$$y(0) = 0 = C_2 - \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{2}{9}\,;$$

mentre dalla derivata prima:

$$y'(x) = 2C_1\,\cos 2x - 2C_2\,\sin 2x + \frac{1}{3}\,\sin x + \frac{1}{3}\,(x+1)\,\cos x + \frac{2}{9}\,\sin x\,,$$

troviamo:

$$y'(0) = 0 = 2C_1 + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{6}\,.$$

La soluzione finale del problema di Cauchy dato è quindi la seguente:

$$y(x) = -\frac{1}{6}\,\sin 2x + \frac{2}{9}\,\cos 2x + \frac{1}{3}\,(x+1)\,\sin x - \frac{2}{9}\,\cos x\,.$$

■

Exercise 3.5 Si trovi la Soluzione Generale della seguente equazione differenziale lineare non-omogenea:

$$y''' + y' = x\,\sin x - \cos x\,. \tag{3.36}$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata $y_o''' + y_o' = 0$ porta alla seguente equazione caratteristica: $\lambda\,(\lambda^2 + 1) = 0$, le cui radici sono: $\lambda_1 = 0$ (con molteplicità $m_1 = 1$) e $\lambda_{2,3} = \pm i$ (con molteplicità $m_{2,3} = 1$). Pertanto, la soluzione generale dell'eq. omogenea associata è data da:

$$y_o(x) = C_1 + C_2\,\sin x + C_3\,\cos x\,. \tag{3.37}$$

Poichè il termine noto è somma di due “funzioni” distinte ($f_1(x) = x\sin x$ e $f_2(x) = -\cos x$), per quanto visto nella “Proposizione” (3.2.2), anche la soluzione particolare sarà esprimibile come somma di due termini: $y_p = y_{p1} + y_{p2}$; ciascuno dei quali risolverà l’eq. col corrispondente *termine noto*. Più specificatamente, queste due soluzioni particolari saranno soluzioni delle seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} y'''_{p1} + y'_{p1} = x\sin x\,, \\ y'''_{p2} + y'_{p2} = -\cos x\,. \end{cases} \tag{3.38}$$

In questo modo, infatti, si verifica facilmente che la loro somma soddisfa l’eq. completa data in (3.36):

$$(y_{p1} + y_{p2})''' + (y_{p1} + y_{p2})' = x\sin x - \cos x\,.$$

Iniziamo con la ricerca della prima soluzione y_{p1} . Poiché $f_1(x) = x\sin x \sim \mathscr{P}^{(1)}(x)\,e^{\pm ix}$, vediamo che in questo caso il parametro $h\,(=\pm i)$ definito nella (3.20) coincide proprio con le radici λ_2 e λ_3 (entrambe di molteplicità unitaria) dell’eq. caratteristica. Pertanto, secondo quanto spiegato nella *Proposizione* (3.2.1), questo primo termine della soluzione particolare si potrà scrivere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} y_{p1}(x) &= \tilde{\mathscr{Q}}_{+}^{(1)}(x)\cdot x^1\cdot e^{ix} + \tilde{\mathscr{Q}}_{-}^{(1)}(x)\cdot x^1\cdot e^{-ix} = \\ &= \mathscr{Q}_{s}^{(1)}(x)\cdot x\sin x + \mathscr{Q}_{c}^{(1)}(x)\cdot x\cos x = \\ &= (ax+b)\,x\sin x + (cx+d)\,x\cos x = \\ &= (ax^2+bx)\sin x + (cx^2+dx)\cos x\,. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Possiamo determinare i parametri $\{a,b,c,d\}$ imponendo che y_{p1} soddisfi la prima delle (3.38); il calcolo delle sue derivate dà:

$$\begin{cases} y'_{p1} = \cdots = (ax^2+bx+2cx+d)\cos x + (2ax+b-cx^2-dx)\sin x\,, \\ y''_{p1} = \cdots = (-cx^2+4ax-dx+2b+2c)\cos x + (-ax^2-4cx-bx+2a-2d)\sin x\,, \\ y'''_{p1} = \cdots = (cx^2-6ax+dx-3b-6c)\sin x + (-ax^2--bx-6cx+6a-3d)\cos x\,. \end{cases} \tag{3.40}$$

Sostituendo nella prima delle eq. in (3.38) ed uguagliando i termini corrispondenti si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 6a-2d = 0\,, \\ -4c = 0\,, \\ -4a = 1\,, \\ -2b-6c = 0\,, \end{cases} \tag{3.41}$$

la cui soluzione è: $\{a,b,c,d\} = \{-\frac{1}{4},\,0,\;0,\;-\frac{3}{4}\}$. La soluzione particolare y_{p1} è quindi:

$$y_{p1}(x) = -\frac{1}{4}x^2\sin x - \frac{3}{4}x\cos x\,.$$

Analogamente si opera per cercare y_{p2} , che deve soddisfare la seconda eq. in (3.38). Questa volta, poiché il termine noto non contiene alcun polinomio in x, ma solo il termine $-\cos x$, che corrisponde ad avere di nuovo un'esponenziale $\sim e^{\pm ix}$, e quindi $h = \pm i = \lambda_{2,3}$ (come nel caso precedente di y_{p1}), possiamo assumere che $y_{p2}(x)$ abbia la seguente forma:

$$\begin{aligned} y_{p2}(x) &= \tilde{\mathscr{Q}}_{+}^{(0)}(x)\cdot x^1 \cdot e^{ix} + \tilde{\mathscr{Q}}_{-}^{(0)}(x)\cdot x^1 \cdot e^{-ix} = \\ &= \mathscr{Q}_{s}^{(0)}(x)\cdot x\sin x + \mathscr{Q}_{c}^{(0)}(x)\cdot x\cos x = \\ &= x\,(\alpha\,\sin x + \beta\,\cos x)\,. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Le sue derivate sono:

$$\begin{cases} y'_{p2} = \cdots = (\beta + \alpha x)\,\cos x + (\alpha - \beta x)\,\sin x\,, \\ y''_{p1} = \cdots = (2\alpha - \beta x)\,\cos x - (2\beta + \alpha x)\,\sin x\,, \\ y'''_{p1} = \cdots = (-3\alpha + \beta x)\,\sin x - (3\beta + \alpha x)\,\cos x\,. \end{cases} \tag{3.43}$$

Sostituendo quindi nella seconda delle eq.(3.38) ed uguagliando i termini corrispondenti si ottiene: $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, cosicché:

$$y_{p2}(x) = \frac{1}{2}\,x\cos x\,.$$

Sommando infine la soluzione dell'omogenea associata $y_o(x)$ data in (3.37) e i due termini della soluzione particolare $y_{p1}(x)$ e $y_{p2}(x)$, si ottiene la soluzione generale cercata:

$$y(x) = C_1 + \left(C_2 - \frac{1}{4}x^2\right)\,\sin x + \left(C_3 - \frac{1}{4}x\right)\,\cos x\,.$$

■

3.2.2 Equazione non-omogenea (Seconda Parte): Metodo della "Variazione delle Costanti Arbitrarie"

In quest'ultima sezione vogliamo trattare un ulteriore metodo di risoluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, che, a differenza di quanto visto precedentemente, può essere utilizzato anche quando il termine noto $f(x)$ non ha la forma data in (3.20). Vediamo in dettaglio in cosa consiste questo metodo. Sia

$$L^{(n)}(y(x)) = f(x) \tag{3.44}$$

una generica equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti, con l'operatore $L^{(n)}$ dato da:

$$L^{(n)} = D^{(n)} + A_1\,D^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}\,D + A_n$$

(con $D^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k}$). Siano quindi λ_1 , λ_2 , ... , λ_r le radici dell'equazione caratteristica ad essa associata, rispettivamente di molteplicità algebriche m_1 , m_2 , ... , m_r , (con $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$). Allora, per quanto visto nella *Sezione* precedente, la soluzione dell'omogenea associata $y_o(x)$, detta anche "Funzione Complementare", si può sempre esprimere come combinazione lineare di

n funzioni linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} y_o(x) = &\left(C_{10}+C_{11}\,x+C_{12}\,x^2+\cdots+C_{1,m_1-1}\,x^{m_1-1}\right)\,e^{\lambda_1 x} + \\ &+\left(C_{20}+C_{21}\,x+C_{22}\,x^2+\cdots+C_{2,m_2-1}\,x^{m_2-1}\right)\,e^{\lambda_2 x} + \\ &+\cdots+\left(C_{r0}+C_{r1}\,x+C_{r2}\,x^2+\cdots+C_{r,m_r-1}\,x^{m_r-1}\right)\,e^{\lambda_r x} = \\ =&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}\,y_{ij}(x) \;\equiv \sum_{ij} c_{ij}\,y_{ij}(x)\,, \end{aligned} \tag{3.45}$$

dove si è posto:

$$y_{ij}(x) = x^j\,e^{\lambda_i x}\,, \qquad (\forall\, i=1,2,\ldots,r\,;\quad j=0,1,\ldots,m_i-1\,)\,. \tag{3.46}$$

e abbiamo abbreviato la *notazione* della doppia sommatoria, definendo: $\sum_{ij} \equiv \sum_{i=1}^{r}\,\sum_{j=0}^{m_i-1}$.

Dimostreremo ora che una *Soluzione Particolare* dell'equazione completa (3.44) può essere scritta in modo simile alla (3.45):

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{m_i-1} \phi_{ij}(x)\;y_{ij}(x) \;\equiv \sum_{ij} \phi_{ij}(x)\;y_{ij}(x)\,, \tag{3.47}$$

ma dove le *costanti arbitrarie* C_{ij} sono state sostituite con opportune funzioni $\phi_{ij}(x)$, che devono soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sum_{ij} \phi'_{ij}\;y_{ij} = 0\,, \\ \sum_{ij} \phi'_{ij}\;y'_{ij} = 0\,, \\ \quad\vdots \\ \sum_{ij} \phi'_{ij}\;y_{ij}^{(n-2)} = 0\,, \\ \sum_{ij} \phi'_{ij}\;y_{ij}^{(n-1)} = f(x)\,. \end{cases} \tag{3.48}$$

Verifichiamo quindi che la $y_p(x)$ così definita soddisfa in effetti la (3.44). Calcolandone le prime n derivate, tenendo conto delle condizioni (3.48), troviamo:

$$\begin{aligned} y'_p &= \sum_{ij} \phi'_{ij}\;y_{ij} + \sum_{ij} \phi_{ij}\;y'_{ij} = \sum_{ij} \phi_{ij}\;y'_{ij}\,, \\ y''_p &= \sum_{ij} \phi'_{ij}\;y'_{ij} + \sum_{ij} \phi_{ij}\;y''_{ij} = \sum_{ij} \phi_{ij}\;y''_{ij}\,, \\ &\;\;\vdots \\ y_p^{(n-2)} &= \cdots = \sum_{ij} \phi_{ij}\;y_{ij}^{(n-2)}\,, \\ y_p^{(n-1)} &= \sum_{ij} \phi'_{ij}\;y_{ij}^{(n-2)} + \sum_{ij} \phi_{ij}\;y_{ij}^{(n-1)} = \sum_{ij} \phi_{ij}\;y_{ij}^{(n-1)}\,, \\ y_p^{(n)} &= \sum_{ij} \phi'_{ij}\;y_{ij}^{(n-1)} + \sum_{ij} \phi_{ij}\;y_{ij}^{(n)} = f(x) + \sum_{ij} \phi_{ij}\;y_{ij}^{(n)}\,. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Pertanto, l'azione dell'operatore differenziale $L^{(n)}$ su $y_p(x)$ sarà data da:

$$\begin{aligned} L^{(n)}(y_p) &= \left(D^{(n)} + A_1 D^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1} D + A_n\right) y_p(x) \; = \\ &= y_p^{(n)} + A_1 y_p^{(n-1)} + A_2 y_p^{(n-2)} + \cdots + A_{n-1} y_p' + A_n y_p = \\ &= f(x) + \sum_{ij} \phi_{ij} y_{ij}^{(n)} + A_1 \sum_{ij} \phi_{ij} y_{ij}^{(n-1)} + A_2 \sum_{ij} \phi_{ij} y_{ij}^{(n-2)} + \cdots + A_{n-1} \sum_{ij} \phi_{ij} y_{ij}' + A_n \sum_{ij} \phi_{ij} y_{ij} = \\ &= f(x) + \sum_{ij} \phi_{ij} \left(y_{ij}^{(n)} + A_1 y_{ij}^{(n-1)} + A_2 y_{ij}^{(n-2)} + \cdots + A_{n-1} y_{ij}' + A_n y_{ij}\right) = \\ &= f(x) \,, \qquad (q.e.d.) \end{aligned} \tag{3.50}$$

dove nell'ultimo *step* si è tenuto conto che, per definizione, tutte le n funzioni indipendenti y_{ij} sono soluzioni dell'equazione omogenea associata: $L^{(n)}(y_{ij}) = 0$, $(\forall\, i = 1\,2, \ldots, r\,, \quad \forall\, j = 0, 1, 2, \ldots, m_i - 1\;)$. Abbiamo così dimostrato che $y_p(x)$ data dalla (3.47) è in effetti una soluzione particolare dell'equazione data (3.44).

Qualche esempio esplicito potrà chiarire ulteriormente questo *metodo* di risoluzione, detto *"della Variazione delle Costanti Arbitrarie"*.

■ **Example 3.6** Si debba risolvere l'equazione:

$$y''' + y' = \frac{1}{\sin x} \,. \tag{3.51}$$

Poiché il termine noto $f(x)$ non ha la forma data in (3.20), la *Soluzione Particolare* $y_p(x)$ non può essere ottenuta utilizzando le regole date nel paragrafo (3.2). Proveremo quindi ad utilizzare il *Metodo* della *Variazione delle Costanti Arbitrarie*.

L'operatore differenziale di questa equazione è $L^{(3)} = D^3 + D$ e l'equazione omogenea associata è $y_o''' + y_o' = 0$. La corrispondente equazione caratteristica, $\lambda\,(\lambda^2 + 1) = 0$, ha tre radici distinte, tutte di molteplicità 1:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0\,, \quad (m_1 = 1)\,, \\ \lambda_2 = -i\,, \quad (m_2 = 1)\,, \\ \lambda_3 = i\,, \quad (m_3 = 1)\,. \end{cases} \tag{3.52}$$

La soluzione generale dell'omogenea è quindi data da:

$$\begin{aligned} y_o(x) &= C_1 + \tilde{C}_2 e^{-ix} + \tilde{C}_3 e^{ix} \; = \\ &= C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x \; \equiv \\ &\equiv C_{10}\, y_{10} + C_{20}\, y_{20} + C_{30}\, y_{30} \,, \end{aligned} \tag{3.53}$$

dove, di nuovo, in virtù delle formule di Eulero, si sono utilizzate le funzioni trigonometriche del "seno" e del "coseno" in corrispondenza di $e^{\pm ix}$, e dove si sono utilizzate le notazioni introdotte precedentemente in questo stesso paragrafo. Vediamo così che le tre funzioni linearmente indipendenti y_{ij} della (3.46) sono:

$$y_{10} = 1\,; \qquad y_{20} = \cos x\,; \qquad y_{30} = \sin x\,. \tag{3.54}$$

Allora, secondo quanto visto sopra, eq.(3.47), potremo scrivere la "Soluzione Particolare" nella seguente forma:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \phi_{10}\, y_{10} + \phi_{20}\, y_{20} + \phi_{30}\, y_{30} = \\ &= \phi_{10} + \phi_{20}\, \cos x + \phi_{30}\, \sin x \,, \end{aligned} \tag{3.55}$$

dove le tre funzioni incognite ϕ_{ij} devono soddisfare il sistema (3.48):

$$\begin{cases} \phi'_{10}\, y_{10} + \phi'_{20}\, y_{20} + \phi'_{30}\, y_{30} = \phi'_{10} \cdot 1 + \phi'_{20} \cos x + \phi'_{30} \sin x = 0 \,, \\ \phi'_{10}\, y'_{10} + \phi'_{20}\, y'_{20} + \phi'_{30}\, y'_{30} = \phi'_{10} \cdot 0 + \phi'_{20} (-\sin x) + \phi'_{30} (\cos x) = 0 \,, \\ \phi'_{10}\, y''_{10} + \phi'_{20}\, y''_{20} + \phi'_{30}\, y''_{30} = \phi'_{10} \cdot 0 + \phi'_{20} (-\cos x) + \phi'_{30} (-\sin x) = f(x) = \dfrac{1}{\sin x} \,. \end{cases} \tag{3.56}$$

Risolviamo questo sistema. Facendo la somma della prima e della terza equazione troviamo:

$$\phi'_{10} = \frac{1}{\sin x} \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{10} = \int \frac{dx}{\sin x} = -\log\left(\frac{1}{\sin x} + \cot x\right) \,.$$

Dalla seconda equazione vediamo che $\phi'_{20} \sin x = \phi'_{30} \cos x$, ovvero: $\phi'_{30} = \phi'_{20} \tan x$. Sostituendo questa relazione nella terza eq. si ottiene quindi:

$$-\phi'_{20} \cos x - \phi'_{20} \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x} \,,$$

da cui possiamo ottenere ϕ_{20}:

$$\phi'_{20} = -\cot x \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{20} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = -\log(\sin x) \,;$$

a questo punto possiamo infine trovare anche ϕ_{30}:

$$\phi'_{30} = \phi'_{20} \tan x = -\cot x \, \tan x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{30} = -\int 1\, dx = -x \,.$$

La *soluzione particolare* cercata è pertanto data dalla (3.55):

$$y_p(x) = -\log\left(\frac{1}{\sin x} + \cot x\right) - \cos x \, \log(\sin x) - x \sin x \,.$$

La soluzione generale dell'equazione data (3.51) è infine data dalla somma di $y_o(x)$ e $y_p(x)$:

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \log\left(\frac{1}{\sin x} + \cot x\right) - \cos x \, \log(\sin x) - x \sin x \,.$$

■

Exercise 3.6 Si risolva la seguente equazione differenziale lineare:

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2} \,. \tag{3.57}$$

Svolgimento:

Anche in questo caso il termine noto non è riconducibile alla forma (3.20), pertanto utilizzeremo il Metodo della Variazione delle costanti arbitrarie.

All'eq. omogenea associata:

$$y_o'' - 6y_o' + 9y_o = 0 \tag{3.58}$$

corrisponde l'eq. *caratteristica*: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, che ha un'unica radice, $\lambda_1 = 3$, di molteplicità $m_1 = 2$. Quindi, in accordo con le eq.(3.45) e (3.46), la sua soluzione generale è data da:

$$y_o(x) = (C_{10} + C_{11}\,x)\,e^{3x}\,, \tag{3.59}$$

e le due funzioni indipendenti (y_{ij}) sono:

$$y_{10} = e^{3x}\,, \qquad y_{11} = x\,e^{3x}\,.$$

La *soluzione particolare*, secondo l'eq.(3.47) va quindi cercata della seguente forma:

$$y_p(x) = \phi_{10}\,y_{10} + \phi_{11}\,y_{11} = (\phi_{10} + \phi_{11}\,x)\,e^{3x}\,, \tag{3.60}$$

dove le due funzioni incognite ϕ_{10} e ϕ_{11} devono soddisfare il sistema (3.48):

$$\begin{cases} \phi_{10}'\,y_{10} + \phi_{11}'\,y_{11} = (\phi_{10}' + \phi_{11}'\,x)\,e^{3x} = 0\,, \\ \phi_{10}'\,y_{10}' + \phi_{11}'\,y_{11}' = \phi_{10}'\,3\,e^{3x} + \phi_{11}'\,(1+3x)\,e^{3x} = f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x^2}\,. \end{cases} \tag{3.61}$$

Dalla prima eq. troviamo $\phi_{10}' = -x\,\phi_{11}'$, che sostituito nella seconda ci dà:

$$\phi_{11}' = \frac{1}{x^2}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{11} = -\frac{1}{x}\,,$$

e quindi:

$$\phi_{10}' = -x\,\phi_{11}' = -x \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{10} = -\log x\,.$$

In definitiva, perciò, la soluzione particolare è data da:

$$y_p(x) = -(1 + \log x)\,e^{3x}\,,$$

che sommata alla soluzione dell'omogenea (3.59) ci dà la soluzione generale dell'eq. data (3.57):

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = (C_{10} + C_{11}\,x - 1 - \log x)\,e^{3x}\,,$$

ovvero:

$$y(x) = (C_1 + C_2\,x - \log x)\,e^{3x}\,,$$

dove si è inglobato il fattore 1 nella costante d'integrazione C_1 e si è rinominato $C_{11} \equiv C_2$. ■