

Sul Moto Retrogrado dei Pianeti nel Modello di Tolomeo

Stefano Ranfone *

Abstract

Keywords: Astronomia, Moti Planetari, Tolomeo, Epicicli, Copernico.

In questo breve lavoro si vuole studiare il "Moto Retrogrado" dei pianeti nel contesto del modello planetario di Tolomeo, con epicicli e eccentrici, anche a completamento dello studio dello stesso moto retrogrado nell'ambito del modello eliocentrico di Copernico, trattato in un precedente articolo [1].

[In this paper we study the "Retrograde Motion" of planets in the context of a Ptolemaic model, with "epicycles" and "eccentrics", also as a completion of a previous work [1] where we discussed the same phenomenon in the framework of a copernican heliocentric model.]

1 Introduzione

In un precedente lavoro [1] si è studiato il "Moto Retrogrado" dei pianeti nel contesto del Modello Copernicano, secondo il quale tutti i pianeti si muovono uniformemente su orbite perfettamente circolari attorno al Sole, posto al centro. Poiché per molti dei pianeti del sistema solare l'eccentricità osservata è in effetti abbastanza piccola, non sorprende che tale modello abbia fornito risultati ragionevolmente accettabili. In particolare, in [1] si è ottenuta una formula esplicita (eq.(13) in [1]) con la quale può essere calcolata la durata del *Moto Retrogrado* apparente osservato dalla Terra di un generico pianeta, in funzione soltanto della sua distanza dal Sole. La sua applicazione ai pianeti *interni* Mercurio e Venere, discussa in [1], ha in effetti condotto a risultati compatibili coi dati osservativi. Ricordiamo brevemente in cosa consiste il cosiddetto "Moto Retrogrado". Come è noto, i pianeti percorrono orbite ellittiche nelle quali il Sole occupa uno dei fuochi. La velocità del pianeta nella sua orbita è variabile, nel rispetto della "Seconda Legge di Keplero"¹. Viste dal Polo Nord Celeste tutte le orbite risultano essere antiorarie. Di conseguenza, se viste dalla superficie Terrestre, esse appaiono *per lo più*, traiettorie da Ovest a Est; questo è il cosiddetto "Moto Diretto". Tuttavia, durante la loro rivoluzione attorno al Sole, per motivi di prospettiva, dalla Terra il loro moto appare "retrogrado", cioè da Est a Ovest, ad intervalli di tempo regolari. Fin dall'antichità questo fatto è stato fonte di serie difficoltà. Il semplice modello con le sfere omocentriche di Eudosso, poi adottato e perfezionato da Aristotele, e per questo a lungo accettato e diffuso fino alla fine del Medioevo, sembrava essere incompatibile con questi moti *retrogradi*, essendo caratterizzato da una Terra ferma al centro intorno alla quale ruota uniformemente un certo numero di sfere *solide* concentriche su ciascuna delle quali è *incastonato* un pianeta. Al di là di queste sfere veniva infine posta (almeno) un'ulteriore sfera contenente le "stelle fisse". Anche se per avere una spiegazione corretta e definitiva abbiamo dovuto attendere il XVI secolo, con Copernico e il suo sistema *eliocentrico*, per tutto il Medioevo gli astronomi (più che i *filosofi*) hanno cercato di "*salvare i fenomeni*", costruendo modelli matematici capaci di permettere il calcolo della posizione dei singoli pianeti, pur senza la pretesa di fornire una vera e propria descrizione della "realtà fisica" del mondo. Senza alcun dubbio, tra questi il modello che ha incontrato maggior favore è quello di Tolomeo, il grande astronomo vissuto

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

¹Questa Legge, diretta conseguenza della conservazione del Momento Angolare, afferma che il pianeta percorre la sua orbita ellittica col Sole in uno dei fuochi in modo tale da *spazzare* aree uguali (col Sole in uno dei vertici) in tempi uguali.

ad Alessandria nel II secolo d.C., basato sugli “epicicli” e gli “eccentrici”. In realtà, nel corso dei secoli si sono propagate varie versioni di questo modello, tutte più o meno derivate direttamente da quanto esposto dallo stesso Tolomeo nella sua opera enciclopedica, l’*Almagesto*. Possiamo anzi affermare che durante tutto il Medioevo, il filone *filosofico* basato sul “De Caelo” e la “Metaphysica” di Aristotele, con i relativi *Commentarii* e *Quaestiones*, e quello più prettamente *astronomico*, basato essenzialmente sull’“Almagesto” di Tolomeo, hanno percorso strade parallele e distinte, anche se non sono mancati tentativi di sintesi e di unione tra i due punti di vista, come risulta da quella categoria di trattati denominati “Theoricae Planetarum”. Obiettivo comune di queste opere è la ricerca della descrizione puramente cinematica dei moti planetari, tralasciandone lo studio *dinamico*, cioè la ricerca delle forze motrici che ne sono la causa. Ne sono un esempio le due versioni della seconda metà del XIII secolo, una attribuita, con qualche riserva, a Gherardo da Sabbioneta², l’altra scritta dal *traduttore di Euclide*, Campano da Novara. Una versione più tarda fu poi pubblicata da Georg Puerbach alle soglie dell’ultimo quarto del XV secolo col titolo di “Theoricae Novae Planetarum”. La parziale *dicotomia* tra modello filosofico del mondo e modello matematico come strumento per prevedere (anche a fini astrologici!) la posizione nel cielo dei pianeti, è evidente anche nei programmi delle Università medievali, che prevedevano, come libri di testo, sia le già citate opere di Aristotele (e dei suoi Commentatori), che il “De Sphaera” di Giovanni Sacrobosco e delle varie versioni dei *Theoricae Planetarum*. In effetti, molti *Scolastici* medievali, almeno allo scopo di “salvare i fenomeni”, preferirono i modelli basati sugli epicicli e gli eccentrici di Tolomeo alla cosmologia aristotelica, anche se per lo più nelle versioni in cui questi elementi venivano inglobati in vere e proprie sfere “solide”. Esposti inizialmente dal filosofo inglese Ruggero Bacone nel suo *Opus Tertium*, vennero ripresi perfezionandone la descrizione dal francese Pierre d’Ailly nelle sue *Quaestiones* sul *De Sphaera* di Sacrobosco. Fondamentalmente, ad ogni pianeta veniva fatto corrispondere un *Orbe* complessivamente concentrico con la Terra, ma costituito a sua volta da tre sfere (solide) distinte; quella interna avente *eccentrica* (rispetto alla Terra) solo la superficie convessa, mentre quella più esterna, al contrario, aveva *eccentrica* quella concava³. La sfera intermedia, avente entrambe le superfici eccentriche (e per questo detta *eccentrica simpliciter*), era pertanto caratterizzata da uno spessore costante e responsabile del trasporto al suo interno dell’epiciclo che portava con sé il pianeta stesso⁴. La capacità di rendere conto (abbastanza bene) dei dati osservativi sul moto dei pianeti da parte del modello di Tolomeo e delle sue innumerevoli varianti con *Orbi solidi* e corporei, può in qualche modo giustificare il lungo tempo che si è reso necessario per cambiare paradigma, ed arrivare solo nella prima metà del XVI secolo alla soluzione eliocentrica proposta da Copernico.

Nel presente lavoro cercheremo di studiare il moto retrogrado dei pianeti, ed in particolare quello di Mercurio, Venere, e Marte, nel contesto del modello eccentrico ad epicicli di Tolomeo. Pur dando una trattazione piuttosto generale del problema, cercheremo di dedurre, dai semplici dati osservativi, le caratteristiche delle “apparenti” orbite dei pianeti attorno (cioè *rispetto*) alla Terra, solo nel caso semplificato in cui è trascurabile l’eccentricità. Si è tuttavia verificato che le correzioni apportate ai risultati ottenuti da una eccentricità non superiore al 10% non risultano essere molto significative.

2 Analisi Generale del Modello

Come si è detto, nel corso dei secoli si sono avute varie versioni del modello eccentrico ad epicicli. Qui ci occuperemo di quello rappresentato in Fig. 1, in cui ciascun pianeta (P) si muove di moto circolare uniforme su un *epiciclo* di raggio $QP \equiv r$, il cui centro Q percorre a sua volta una traiettoria circolare, detta “deferente”, di raggio a e centro O , ma con un moto che è uniforme *non* rispetto a tale centro, bensì rispetto ad un punto *decentrato* X , detto “equante”, la cui distanza da O è c . La Terra T è fissa e posta nel punto simmetrico a X rispetto al centro O del deferente. I punti estremi A e Π del diametro del cerchio *deferente* passante per X e T sono detti, rispettivamente, *afelio* (il più lontano dalla Terra T) e *perielio* (il più vicino). Le distanze minima e massima del pianeta P dalla Terra T sono perciò date da:

²Talvolta confuso col più noto Gherardo da Cremona, il prolifico traduttore dall’arabo vissuto per molti anni a Toledo.

³E per questo, entrambe dette eccentriche *secundum quid*.

⁴Per un’esauriente descrizione di questi modelli, si rimanda alla *Bibliografia*, in particolare a [3], [2], [4].

$$\begin{cases} d_{min} = a - c - r = a(1 - \epsilon - \lambda), \\ d_{max} = a + c + r = a(1 + \epsilon + \lambda), \end{cases} \quad (1)$$

dove $\epsilon = \frac{c}{a}$ è detta “eccentricità” e $\lambda = \frac{r}{a}$ caratterizza le dimensioni relative dell’epiciclo rispetto al deferente. Sempre facendo riferimento alla Fig. 1, scegliamo come sistema di coordinate quello cartesiano ortogonale di centro O e asse x orientato come $O\Pi$. Gli angoli *polar*i sono definiti come $\Pi\hat{O}Q \equiv \beta$, $\Pi\hat{T}Q \equiv \theta$, e $\Pi\hat{X}Q \equiv \alpha$ (detta *longitudine*). Come si è detto, per ipotesi il moto del pianeta nell’epiciclo è uniforme, cosicché la corrispondente velocità angolare $\dot{\phi}$ è costante, essendo ϕ l’angolo polare (detto *anomalia*) che ne descrive la posizione (come mostrato in Fig. 1). Allo stesso modo, l’uniformità del moto del centro Q del deferente rispetto al punto *equante* X significa che la corrispondente velocità angolare $\dot{\alpha}$ è pure costante. L’angolo $\Pi\hat{T}P \equiv \psi$ descrive infine la posizione del pianeta P rispetto alla Terra T . Il “Moto Diretto” da Ovest a Est corrisponde perciò ad un aumento nel tempo di questo angolo ψ ($\dot{\psi} > 0$), mentre quello “Retrogrado” da Est a Ovest corrisponde ad una sua diminuzione ($\dot{\psi} < 0$). Dette infine $d \equiv \overline{XQ}$ e $b \equiv \overline{TQ}$ le distanze, rispettivamente, del punto equante X e della Terra T dal centro Q dell’epiciclo, si possono scrivere le seguenti relazioni geometriche:

$$\begin{cases} d^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \end{cases} \quad (2)$$

come pure:

$$\begin{cases} d \sin \alpha = a \sin \beta = b \sin \theta, \\ d \cos \alpha = a \cos \beta + c = b \cos \theta + 2c. \end{cases} \quad (3)$$

Quadrando la prima delle (3) e utilizzando la (2) si ottiene:

$$a^2 \sin^2 \beta = a^2 (1 - \cos^2 \beta) = d^2 \sin^2 \alpha = (a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta) \sin^2 \alpha,$$

ovvero:

$$\cos^2 \beta + (2\epsilon \sin^2 \alpha) \cos \beta - (\cos^2 \alpha - \epsilon^2 \sin^2 \alpha) = 0, \quad (4)$$

dove $\epsilon \equiv \frac{c}{a}$ è l’*eccentricità* già definita precedentemente. Risolvendo rispetto all’angolo β si trova pertanto:

$$\cos \beta = \cos \alpha \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \alpha} - \epsilon \sin^2 \alpha, \quad (5)$$

cosicché l’eq.(2) dà:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \left(\cos \alpha \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \alpha} - \epsilon \sin^2 \alpha \right)} = \\ &= a \sqrt{1 + \epsilon^2 \cos 2\alpha + 2\epsilon \cos \alpha \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \alpha}} \equiv \\ &\equiv a \Sigma, \end{aligned} \quad (6)$$

dove, essendo per ipotesi il moto del centro Q dell’epiciclo uniforme rispetto al punto *equante* X , possiamo porre: $\alpha(t) = \dot{\alpha} t$ (avendo scelto $\alpha(t=0)=0$). Pertanto il raggio vettore \vec{TQ} che unisce la Terra al centro dell’epiciclo si può esprimere come:

$$\begin{aligned}\vec{TQ} &= b(\hat{\mathbf{i}} \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta) = (d \cos \alpha - 2c)\hat{\mathbf{i}} + (d \sin \alpha)\hat{\mathbf{j}} = \\ &= a \left\{ (\Sigma \cos \alpha - 2\epsilon)\hat{\mathbf{i}} + \Sigma \sin \alpha \hat{\mathbf{j}} \right\}.\end{aligned}\quad (7)$$

Essendo poi:

$$\vec{QP} = r(\hat{\mathbf{i}} \cos \phi + \hat{\mathbf{j}} \sin \phi), \quad (8)$$

(con $\phi(t) = \dot{\phi}t$) il vettore che descrive il moto (uniforme) del pianeta P intorno al centro Q dell'epiciclo, possiamo ottenere la seguente formula per la *legge oraria* del raggio vettore che unisce la Terra T al pianeta P :

$$\begin{aligned}\vec{TP} &= \vec{TQ} + \vec{QP} = \\ &= a \left\{ \left(\Sigma(t) \cos \dot{\alpha}t - 2\epsilon + \lambda \cos \dot{\phi}t \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\Sigma(t) \sin \dot{\alpha}t + \lambda \sin \dot{\phi}t \right) \hat{\mathbf{j}} \right\},\end{aligned}\quad (9)$$

dove $\lambda = \frac{r}{a}$. L'angolo polare ψ di questo raggio vettore è quindi dato da:

$$\begin{aligned}\psi &= \arctan \left(\frac{\vec{TP} \cdot \hat{\mathbf{j}}}{\vec{TP} \cdot \hat{\mathbf{i}}} \right) = \arctan \left(\frac{\Sigma(t) \sin \dot{\alpha}t + \lambda \sin \dot{\phi}t}{\Sigma(t) \cos \dot{\alpha}t - 2\epsilon + \lambda \cos \dot{\phi}t} \right) \equiv \\ &\equiv \arctan \left(\frac{N(t)}{D(t)} \right),\end{aligned}\quad (10)$$

dove Σ è stato implicitamente definito nell'eq.(6). L'*apparente* "Moto Retrogrado" di un pianeta osservato dalla (prospettiva della) Terra corrisponde ad una diminuzione di questo angolo polare durante un certo intervallo di tempo, detto (come in [1]) $\Delta\tau_R$, cioè ad una velocità angolare negativa ($\dot{\psi} < 0$). Dalla (10) si trova:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{N}{D}\right)^2} \frac{\dot{N}D - N\dot{D}}{D^2} = \frac{\dot{N}D - N\dot{D}}{N^2 + D^2}. \quad (11)$$

Ne possiamo concludere che la condizione che corrisponde ad avere un *Moto Retrogrado* ($\dot{\psi} < 0$) sia:

$$\dot{N}D < N\dot{D}. \quad (12)$$

Essendo $N(t)$ e $D(t)$ definiti nella (10), un semplice calcolo ci permette di esprimere questa stessa condizione come:

$$\begin{aligned}\left(\dot{\Sigma} \sin \dot{\alpha}t + \Sigma \dot{\alpha} \cos \dot{\alpha}t + \lambda \dot{\phi} \cos \dot{\phi}t \right) \left(\Sigma \cos \dot{\alpha}t - 2\epsilon + \lambda \cos \dot{\phi}t \right) < \\ < \left(\Sigma \sin \dot{\alpha}t + \lambda \sin \dot{\phi}t \right) \left(\dot{\Sigma} \cos \dot{\alpha}t - \Sigma \dot{\alpha} \sin \dot{\alpha}t - \lambda \dot{\phi} \sin \dot{\phi}t \right),\end{aligned}\quad (13)$$

da cui, in definitiva:

$$\begin{aligned}\Sigma^2 \dot{\alpha} + \lambda^2 \dot{\phi} + \Sigma \lambda (\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \cos[(\dot{\phi} - \dot{\alpha})t] < \\ < 2\epsilon (\Sigma \dot{\alpha} \cos \dot{\alpha}t + \lambda \dot{\phi} \cos \dot{\phi}t) + \dot{\Sigma} \{ \lambda \sin[(\dot{\phi} - \dot{\alpha})t] + 2\epsilon \sin \dot{\alpha}t \}.\end{aligned}\quad (14)$$

Questa condizione risulta essere troppo complessa per poter essere trattata analiticamente. Essa potrebbe piuttosto essere utilizzata per un'analisi numerica delle traiettorie dei pianeti osservate dalla Terra. È comunque possibile dedurre il valore dei parametri presenti nella nostra versione del modello di Tolomeo dai dati osservativi, semplificando la condizione ottenuta (14) grazie al fatto che le *eccentricità* ϵ risultano essere in generale abbastanza piccole. Porremo quindi $\epsilon = 0$ (e quindi $\Sigma = 1$, $\dot{\Sigma} = 0$), per cui la Terra T coinciderà col centro del *deferente* O e con lo stesso punto *equante* X rispetto al quale la rotazione del centro Q dell'epiciclo è uniforme. In tale ipotesi semplificativa risulta possibile determinare entrambe le velocità angolari, sia quella ($\dot{\alpha}$) di Q attorno a T ($\equiv X$) che quella ($\dot{\phi}$) del pianeta P nell'epiciclo attorno allo stesso punto Q , dalla osservata durata del *Moto Retrogrado* $\Delta\tau_R$ e dal "Periodo Sinodico" T_S del pianeta⁵. Dopodiché, a posteriori, potremo valutare l'entità delle correzioni da apportare alle orbite introducendo piccole eccentricità.

Con $\epsilon = 0$ la condizione (14) dà:

$$(\dot{\alpha} + \lambda^2 \dot{\phi}) + \lambda(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \cos[(\dot{\phi} - \dot{\alpha})t] < 0, \quad (15)$$

da cui si ottiene:

$$\cos \Omega t < -\frac{\dot{\alpha} + \lambda^2 \dot{\phi}}{\lambda(\dot{\alpha} + \dot{\phi})} \equiv -\Gamma, \quad (16)$$

dove si è posto $\Omega = \dot{\phi} - \dot{\alpha}$.

Come è facile verificare anche dai grafici riportati in Fig. 2 (per certi aspetti simili a quelli dati in [1]), da questa disequazione si evince che, almeno nell'ipotesi semplificativa $\epsilon = 0$, la durata del *Moto Retrogrado* può essere determinata dalla seguente formula:

$$\Delta\tau_R = \frac{2}{\dot{\phi} - \dot{\alpha}} \arccos\left(\frac{\dot{\alpha} + \lambda^2 \dot{\phi}}{\lambda(\dot{\alpha} + \dot{\phi})}\right) \equiv \frac{2}{\Omega} \arccos \Gamma, \quad (17)$$

e di conseguenza, quella del *Moto Diretto*, per sottrazione dal "Periodo Sinodico", dalla:

$$\Delta\tau_D = \frac{2\pi}{\Omega} - \Delta\tau_R \equiv T_S - \Delta\tau_R, \quad (18)$$

essendo T_S espresso in termini delle due velocità angolari come:

$$\Omega = \dot{\phi} - \dot{\alpha} = 2\pi/T_S. \quad (19)$$

Utilizzando i dati osservativi per T_S e $\Delta\tau_R$, dalle eq.(17) e (19) possiamo quindi ottenere il valore da assegnare alle due velocità angolari $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$ per il generico pianeta, che risultano essere date dalle:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{(1 - \lambda\Gamma)\Omega}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\Gamma}, \\ \dot{\alpha} = \dot{\phi} - \Omega = \frac{\lambda(\Gamma - \lambda)\Omega}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\Gamma}. \end{cases} \quad (20)$$

⁵Il "Periodo Sinodico", intervallo di tempo necessario ad un pianeta per tornare nella medesima posizione rispetto alla Terra (e al Sole) può essere considerato come somma del "Tempo del Moto Retrogrado" $\Delta\tau_R$ e di quello *Diretto* $\Delta\tau_D$.

Prima di vedere l'applicazione esplicita di quanto ottenuto ai pianeti più vicini alla Terra, notiamo che, dalle eq.(1), possiamo calcolare il raggio a del *deferente* come la distanza media del pianeta dalla Terra:

$$a = \frac{1}{2} (d_{max} + d_{min}), \quad (21)$$

mentre:

$$\lambda + \epsilon \equiv \frac{r + c}{a} = \frac{d_{max} + d_{min}}{d_{max} - d_{min}}. \quad (22)$$

Inoltre, la distanza del pianeta dalla Terra in funzione del tempo può essere scritta, in virtù della (9), come:

$$d_{TP}(t) = a \sqrt{\Sigma^2(t) + \lambda^2 + 2 \Sigma(t) \lambda \cos(\dot{\phi} - \dot{\alpha})t - 4 \epsilon \left(\Sigma(t) \cos \dot{\alpha}t + \lambda \cos \dot{\phi}t \right) + 4 \epsilon^2}, \quad (23)$$

ovvero, considerando trascurabile l'eccentricità ($\epsilon \rightarrow 0$):

$$d_{TP}(t) \simeq a \sqrt{1 + \lambda^2 + 2 \lambda \cos \Omega t}. \quad (24)$$

3 Applicazione ai Pianeti

3.1 Mercurio

I dati relativi a Mercurio sono i seguenti:

$$\begin{cases} d_{min} = 79 \text{ Mkm}, \\ d_{max} = 218 \text{ Mkm}, \end{cases} \quad (25)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} a = 148.5 \text{ Mkm}, \\ \lambda + \epsilon = 0.47. \end{cases} \quad (26)$$

Inoltre le osservazioni forniscono per la durata $\Delta \tau_R$ del suo Moto Retrogrado un valore di circa 24 giorni, mentre il suo *Periodo Sinodico* risulta essere:

$$T_S = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\dot{\phi} - \dot{\alpha}} \simeq 117 \text{ giorni}.$$

Da ciò troviamo che:

$$\Gamma = \cos\left(\frac{\Omega \Delta \tau_R}{2}\right) = \cos\left(\pi \frac{\Delta \tau_R}{T_S}\right) \simeq \cos\left(\frac{24\pi}{117}\right) \simeq 0.80. \quad (27)$$

Le eq.(20) ci permettono quindi di trovare le due velocità angolari che caratterizzano il moto di Mercurio (almeno nell'ipotesi semplificativa di una eccentricità trascurabile):

$$\begin{cases} \dot{\phi} \simeq 1.33 \Omega = \frac{2\pi}{88} \text{ giorni}^{-1}, \\ \dot{\alpha} \simeq 0.33 \Omega = \frac{2\pi}{354.5} \text{ giorni}^{-1}. \end{cases} \quad (28)$$

L'orbita che ne risulta (naturalmente, rispetto alla Terra) ha la forma data in Fig. 3.

Per avere un'idea dell'effetto che può avere l'introduzione di una *piccola* eccentricità sulla forma dell'orbita dei pianeti, abbiamo sviluppato l'espressione della legge oraria (9) al primo ordine in ϵ , ottenendo la seguente formula:

$$\vec{TP} = a \left\{ \left[\cos \dot{\alpha} t + \lambda \cos \dot{\phi} t - \epsilon (1 + \sin^2 \dot{\alpha} t) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[\sin \dot{\alpha} t + \lambda \sin \dot{\phi} t + \frac{\epsilon}{2} \sin 2\dot{\alpha} t \right] \hat{\mathbf{j}} \right\}. \quad (29)$$

Considerando il caso di Mercurio, e supponendo che, in prima approssimazione, un piccolo valore di ϵ non modifichi essenzialmente i valori delle due velocità angolari ottenuti precedentemente (con $\epsilon = 0$), dati nella (28), abbiamo considerato, a titolo di esempio, il caso in cui l'eccentricità è $\epsilon = 0.1$; in tal caso, per la (26), possiamo scegliere $\lambda = 0.47 - \epsilon = 0.37$. L'orbita risultante (in colore *viola*) può essere confrontata in Fig. 4 con l'orbita ottenuta precedentemente in assenza di eccentricità e già data in Fig. 3. Come si vede, l'introduzione di una piccola eccentricità, in effetti, non modifica essenzialmente i risultati precedenti, se non per una riduzione del raggio r dell'epiciclo⁶.

3.2 Venere

Per ottenere l'espressione e la forma dell'orbita (sempre rispetto alla Terra) di Venere nel modello di Tolomeo qui esaminato, abbiamo utilizzato i seguenti dati osservativi:

$$\begin{cases} d_{min} = 38.2 \text{ Mkm}, \\ d_{max} = 261 \text{ Mkm}, \end{cases} \quad (30)$$

da cui:

$$\begin{cases} a = 149.6 \text{ Mkm}, \\ \lambda + \epsilon = 0.745. \end{cases} \quad (31)$$

Inoltre, essendo il *Periodo Sinodico* $T_S = 2\pi/\Omega = 583$ giorni, e la durata del *Moto Retrogrado* $\Delta\tau_R \simeq 42$ giorni, dall'eq.(17), in analogia con la (27), troviamo:

$$\Gamma = \cos\left(\frac{\Omega \Delta\tau_R}{2}\right) = \cos\left(\pi \frac{\Delta\tau_R}{T_S}\right) \simeq \cos\left(\frac{42\pi}{583}\right) \simeq 0.974. \quad (32)$$

Le velocità angolari $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$ calcolabili di nuovo dalle eq.(20), risultano pertanto essere le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{\phi} \simeq 2.64 \Omega = \frac{2\pi}{583} \text{ giorni}^{-1}, \\ \dot{\alpha} \simeq 1.64 \Omega = \frac{2\pi}{354.6} \text{ giorni}^{-1}. \end{cases} \quad (33)$$

⁶Naturalmente avremmo anche potuto mantenere intatte le dimensioni dell'epiciclo, modificando opportunamente le due velocità angolari, $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$.

Con questi valori, sempre considerando il caso *non-eccentrico* ($\epsilon = 0$), possiamo ottenere l'orbita tolemaica di Venere attorno alla Terra utilizzando di nuovo la legge oraria data in eq.(9) (ovvero la (29), con $\epsilon = 0$). Il risultato, su un tempo complessivo di 1600 giorni, è mostrato in Fig. 5. Abbiamo verificato che, anche in questo caso, un piccolo valore dell'eccentricità mantiene essenzialmente inalterata la forma dell'orbita osservata dalla Terra.

3.3 Marte

Vogliamo infine applicare il modello anche a Marte. In questo caso, essendo:

$$\begin{cases} d_{min} = 54.5 \text{ Mkm}, \\ d_{max} = 401.3 \text{ Mkm}, \end{cases} \quad (34)$$

si ottiene:

$$\begin{cases} a = 228 \text{ Mkm}, \\ \lambda + \epsilon = 0.76. \end{cases} \quad (35)$$

Dal *Tempo Sinodico* $T_S \simeq 800$ giorni e dalla durata del *Moto Retrogrado* $\Delta\tau_R \simeq 72$ giorni, si deducono anche in questo caso le due velocità angolari dal valore del parametro Γ :

$$\Gamma = \cos\left(\frac{\Omega \Delta\tau_R}{2}\right) = \cos\left(\pi \frac{\Delta\tau_R}{T_S}\right) \simeq \cos\left(\frac{72\pi}{800}\right) \simeq 0.76, \quad (36)$$

cosicché, di nuovo nell'ipotesi di assenza di eccentricità ($\epsilon = 0$), si trova:

$$\begin{cases} \dot{\phi} \simeq 2.28 \Omega = \frac{2\pi}{350} \text{ giorni}^{-1}, \\ \dot{\alpha} \simeq 1.28 \Omega = \frac{2\pi}{623} \text{ giorni}^{-1}. \end{cases} \quad (37)$$

L'orbita risultante viene rappresentata in Fig. 6.

4 Tolomeo vs. Copernico: orbite planetarie a confronto

È interessante confrontare le traiettorie dei pianeti viste dalla Terra, qui ottenute nel contesto del semplice modello a epicicli di Tolomeo, e rappresentate nel caso di eccentricità nulla nelle Fig. 3, 5 e 6, con quelle previste dal modello eliocentrico di Copernico. La *legge oraria* del raggio vettore che unisce la Terra T al generico pianeta P in quest'ultimo modello, ottenuta in [1], può essere scritta nella seguente forma:

$$\vec{TP} = R \left\{ \left[\kappa^{-2/3} \cos(\kappa\Omega t) - \cos(\Omega t) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[\kappa^{-2/3} \sin(\kappa\Omega t) - \sin(\Omega t) \right] \hat{\mathbf{j}} \right\}, \quad (38)$$

in termini del solo parametro κ definito come il rapporto tra la durata dell'anno terrestre ($T_a \simeq 365$ giorni) ed il *Periodo di Rivoluzione* (T_p) attorno al Sole del particolare pianeta considerato⁷; nella (38) $R \simeq 150$ Mkm è la distanza Terra-Sole e $\Omega = \frac{2\pi}{T_a}$ è la velocità angolare (costante) della Terra nella sua orbita circolare attorno al Sole.

⁷In virtù della "Terza Legge di Keplero", il quadrato di questo rapporto è anche uguale al cubo del rapporto tra le rispettive distanze dal Sole.

Utilizzando i dati relativi ai Periodi di Rivoluzione dei tre pianeti qui considerati:

$$T_{me} \simeq 88 \text{ giorni}, \quad T_{ve} \simeq 224.7 \text{ giorni}, \quad T_{ma} \simeq 686.2 \text{ giorni}, \quad (39)$$

troviamo per i rispettivi valori del parametro κ i seguenti valori:

$$\kappa_{me} \simeq 4.15, \quad \kappa_{ve} \simeq 1.62, \quad \kappa_{ma} \simeq 0.53. \quad (40)$$

Le traiettorie risultanti sono riportate nelle Fig. 7, 8 e 9.

Dal confronto con le precedenti Fig. 3, 4 e 6, calcolate nel modello di Tolomeo, risulta in effetti abbastanza evidente una certa similitudine, specialmente nel caso di Mercurio (Fig. 3 e 7). Ciò conferma, ancor più, come in prima approssimazione i due modelli riuscissero a dare risultati simili, rendendo non facile una loro discriminazione, e imponendo in definitiva la necessità di osservazioni più accurate, osservazioni che si resero possibili solo con l'avvento del telescopio, all'epoca di Galileo.

5 Conclusioni

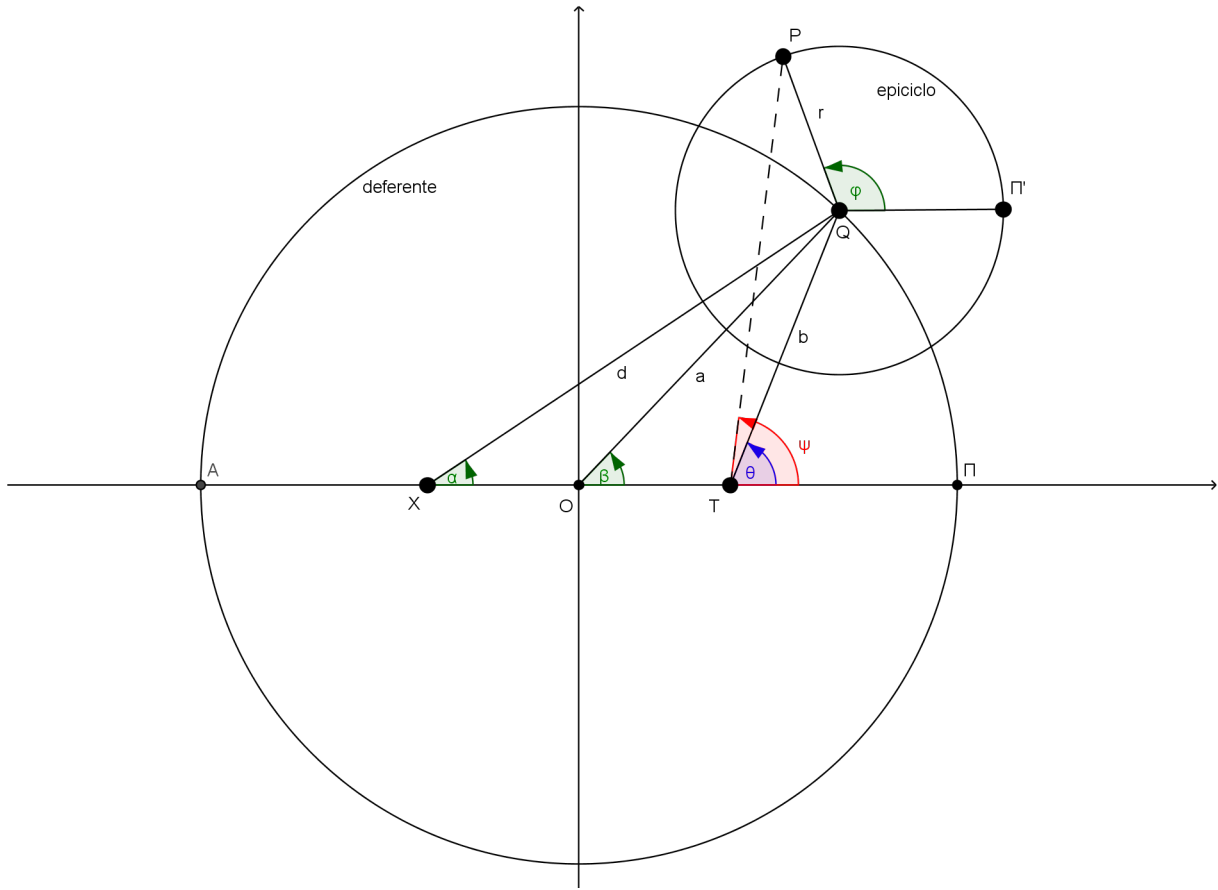
Quanto mostrato dimostra come, in prima approssimazione, anche la più semplice versione del Modello di Tolomeo con gli epicicli, anche con l'eventuale introduzione dell'*eccentrico* ($\epsilon \neq 0$), possa costituire effettivamente un *potenziale* modello "per salvare i fenomeni" e rendere conto del *Moto Retrogrado* dei pianeti osservato dalla Terra. Naturalmente, questa capacità si estende anche a tutti gli altri modelli fondati sull'idea stessa di *epicicli* ed *eccentrici*, inclusi quelli proposti dagli "Scolastici" nel Medioevo⁸, nei quali venivano assegnati (almeno) tre *Orbi* solidi eccentrici ad ogni pianeta, e che abbiamo brevemente descritto nel §1.

Sicuramente, anche se il Modello di Tolomeo non si è rivelato corretto, soppiantato da quello eliocentrico di Copernico e dalle orbite ellittiche di Keplero, resta comunque da apprezzare come "modello matematico", inventato proprio per *salvare i fenomeni* e rendere conto dei dati osservativi, piuttosto che per rappresentare la *Realtà Fisica* del Mondo.

References

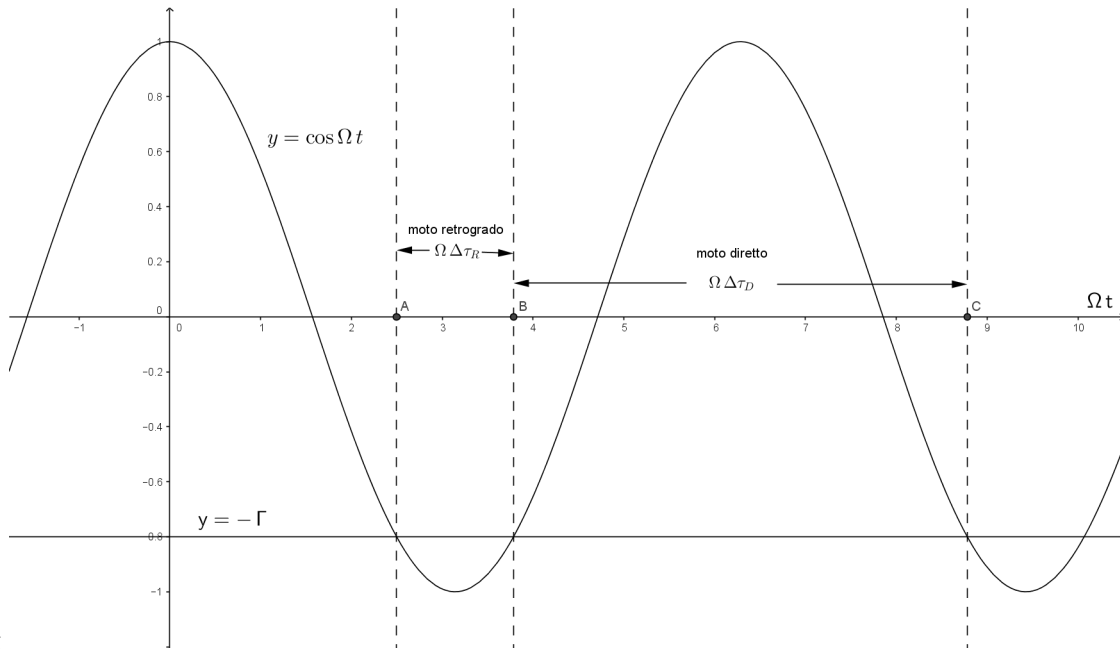
- [1] S. Ranfone, *Sul Moto Retrogrado dei Pianeti*, "Giornale di Fisica", vol.LIII, N.4, (2012) 287-292.
- [2] Edward Grant, *Planets, Stars, & Orbs*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] J. L. E. Dreyer, *Storia dell'Astronomia da Talete a Keplero*, Feltrinelli, Milano.
- [4] Michel-Pierre Lerner, *Il Mondo delle Sfere*, La Nuova Italia, Firenze.
- [5] Michael Hoskin (a cura di -), *Storia dell'Astronomia di Cambridge*, Rizzoli, Milano.
- [6] Olaf Pedersen, *Early Physics and Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge.

⁸Per un'esposizione estesa di questi modelli si veda, per esempio, [3], [2], [4].



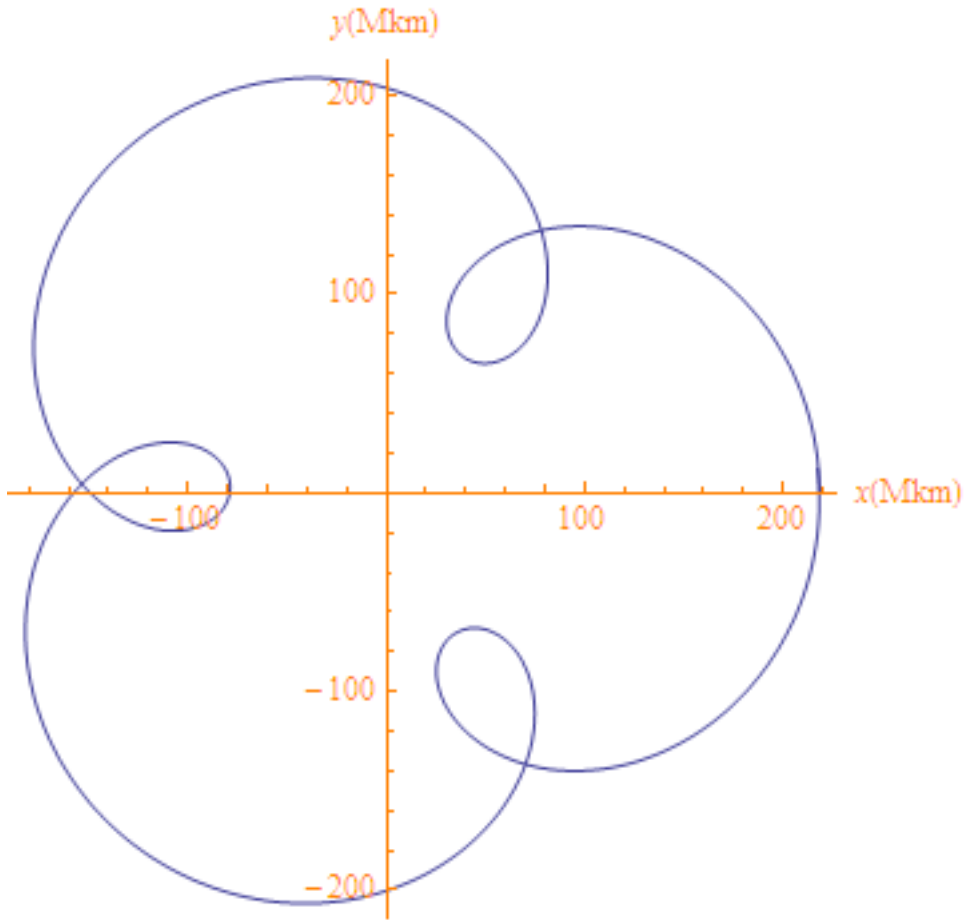
1.png

Fig. 1 Rappresentazione del modello “eccentrico” di Tolomeo. Il pianeta P si muove di moto circolare uniforme sull’*epiciclo*, il cui centro Q si muove sul cerchio *deferente* di centro O , ma con una velocità angolare che è uniforme rispetto al punto decentrato X , detto “equante”. La Terra T si trova nel punto simmetrico a X rispetto al centro O del deferente.



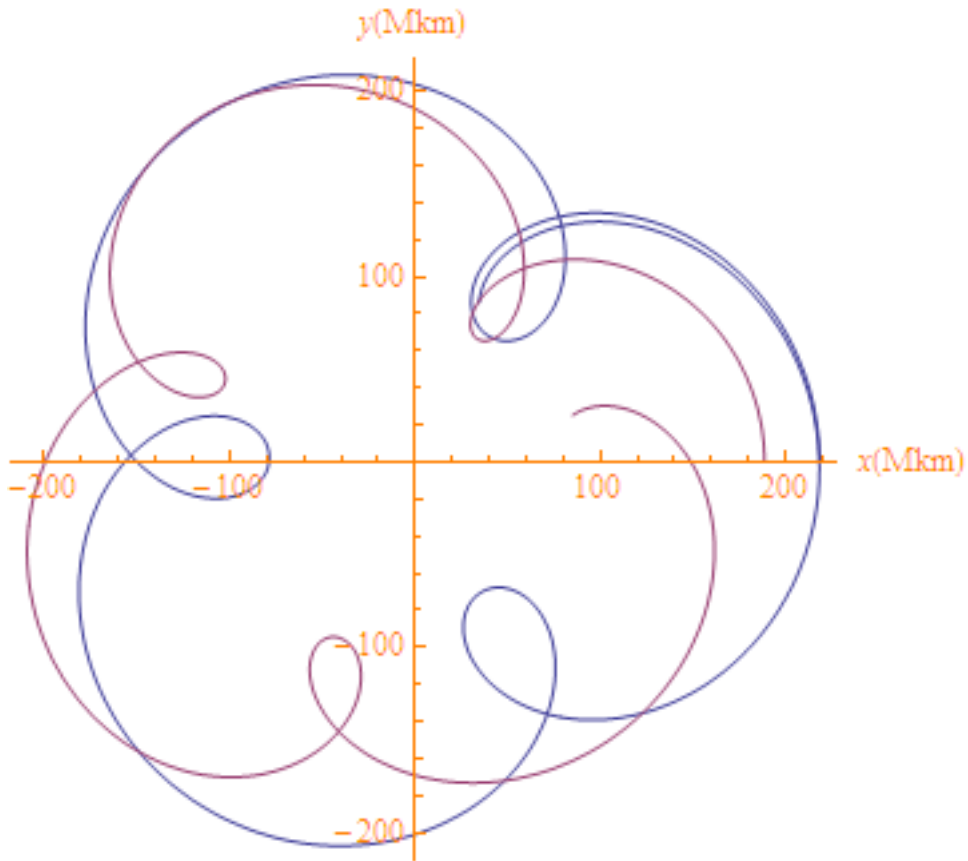
2.png

Fig. 2 Grafici di $y_1 = \cos \Omega t$, $y_2 = -\Gamma$, (per il pianeta Mercurio $\Gamma \simeq 0.8$).



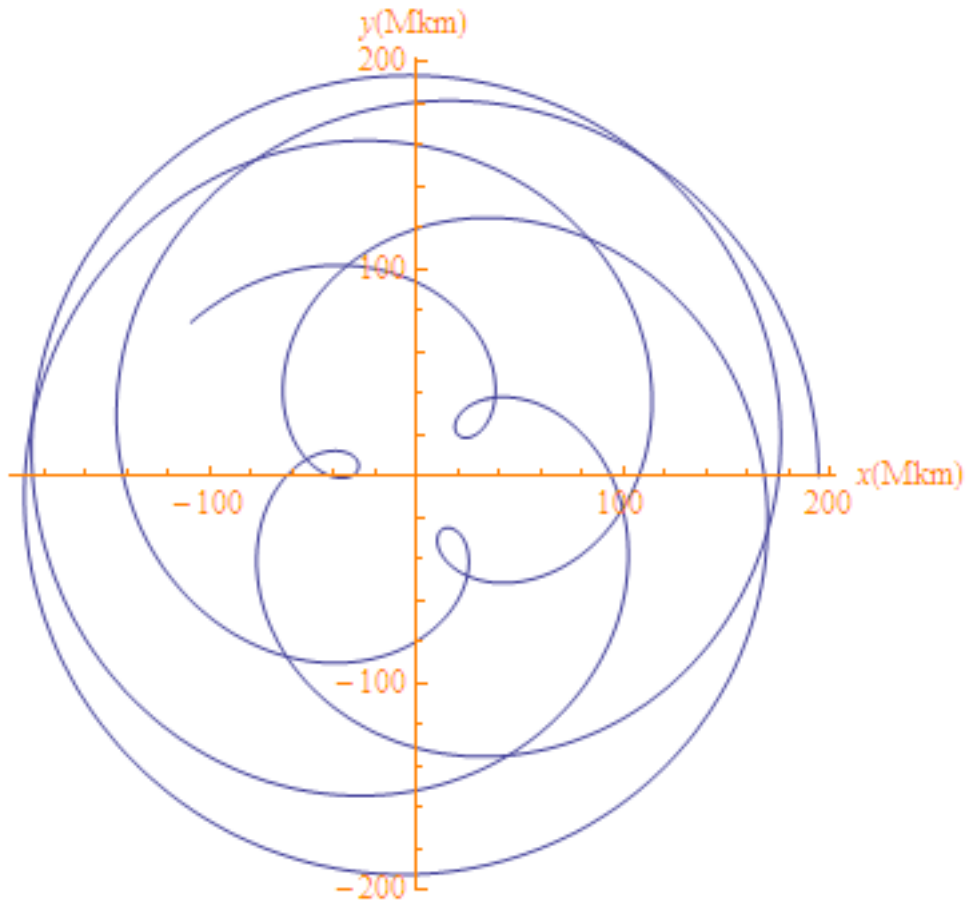
3.png

Fig. 3 Orbita di Mercurio (attorno alla Terra) nel modello epiciclico di Tolomeo, nel caso $\epsilon = 0$.



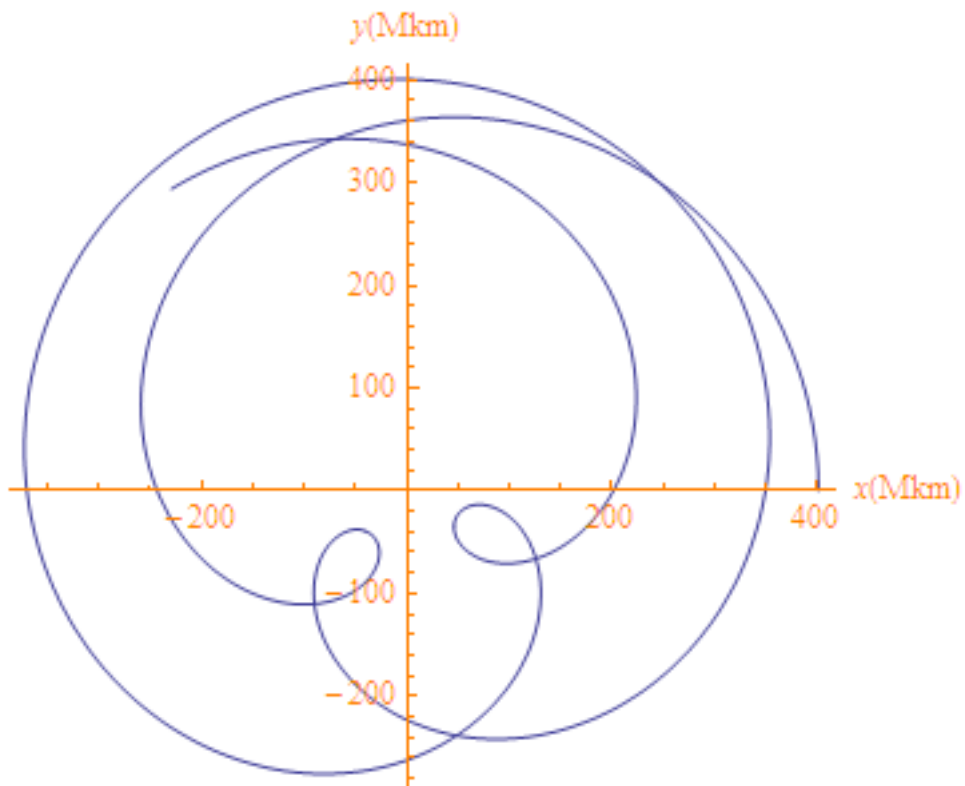
4.png

Fig. 4 Orbita di Mercurio nel modello *eccentrico* di Tolomeo. La traiettoria in color *viola* si riferisce al caso in cui è presente un'eccentricità $\epsilon = 0.1$; per confronto, è riportata di nuovo anche l'orbita relativa al caso $\epsilon = 0$, già data in Fig. 3 .



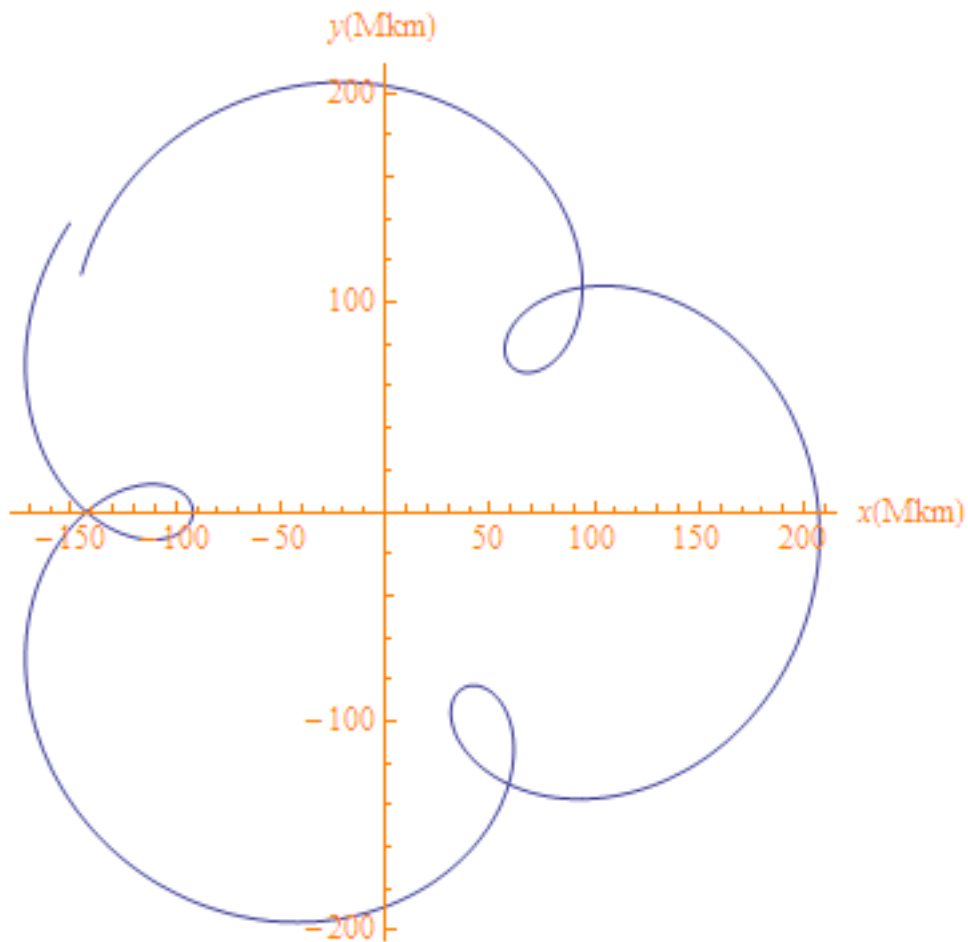
5.png

Fig. 5 Orbita di Venere nel modello di Tolomeo (nel caso $\epsilon = 0$), su un tempo complessivo di 1600 giorni.



6.png

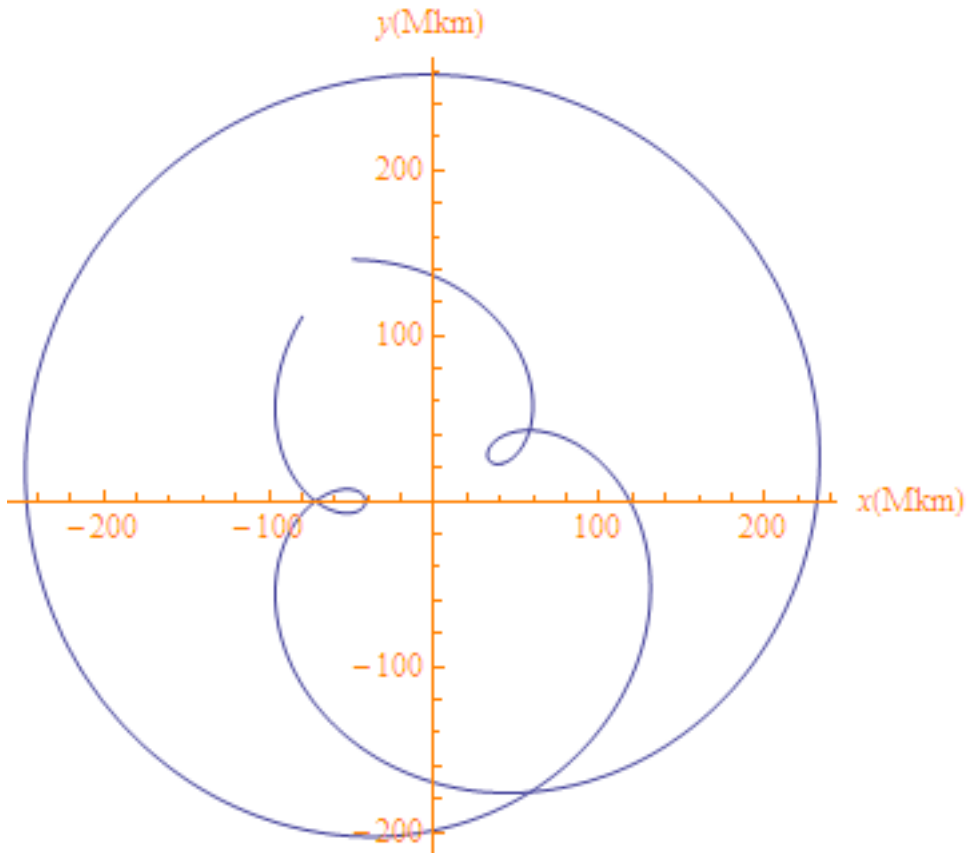
Fig. 6 Orbita di Marte nel modello di Tolomeo (nel caso $\epsilon = 0$), su un tempo complessivo di 1500 giorni.



7.png

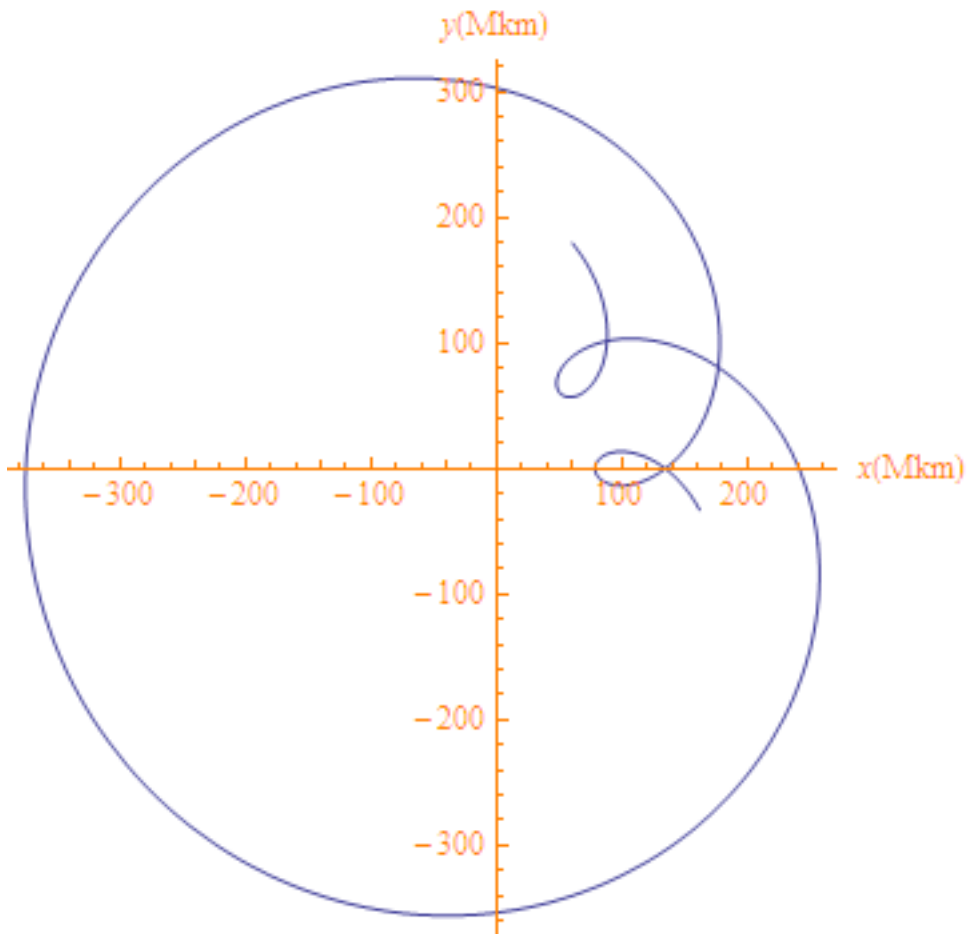
Fig. 7
giorni.

Orbita di Mercurio (relativa alla Terra), nel modello Copernicano, su un tempo complessivo di 800



8.png

Fig. 8 Orbita di Venere (relativa alla Terra), nel modello Copernicano, su un tempo complessivo di 800 giorni.



9.png

Fig. 9
giorni.

Orbita di Marte (relativa alla Terra), nel modello Copernicano, su un tempo complessivo di 1000