Sul Moto Retrogrado dei Pianeti *

Stefano Ranfone †

Abstract

Keywords: Astronomia, Moti Planetari, Copernico.

In queste brevi note si desidera studiare il "Moto Retrogrado" dei pianeti, con l'intento di fornire a fini didattici un utile esempio di applicazione dei concetti di Geometria Vettoriale e di Analisi Matematica. In particolare otterremo una formula esplicita per la durata del "moto Retrogrado" e di quello "Diretto" nell'ipotesi di semplici orbite circolari.

I pianeti hanno attratto l'attenzione degli uomini fin dall'Antichità. Il loro movimento sullo sfondo delle cosiddette "stelle fisse" (*Stellae fixae*), dette origine all'epiteto di "Stelle Erranti" (*Stellae errantes*), con cui venivano globalmente denominati. Il Problema di comprendere la natura del loro moto ha assillato filosofi e astronomi per secoli. Basandosi sul lavoro di Eudosso (IV° secolo a.C.), che ipotizzava "sfere solide omocentriche" centrate sulla Terra, sulle quali erano *fissati* i pianeti, Aristotele costruì la sua Cosmologia. Un sistema caratterizzato da semplici moti circolari uniformi attorno ad un unico centro, coincidente col centro della Terra. Al di là della Luna, a noi la più vicina, l'ordine dei pianeti era quindi il seguente: Mercurio, Venere, Sole, Marte, Giove e Saturno. Gli altri tre pianeti a noi oggi noti, Urano, Nettuno e Plutone, non erano ancora stati scoperti. Oltre Saturno veniva posta la cosiddetta Sfera delle Stelle Fisse, un'unica sfera solida e trasparente sulla quale erano "incastonate" tutte le stelle, caratterizzata dal solo moto *diurno* da est a ovest, con un periodo di ventiquattro ore. I pianeti, d'altra parte, oltre che trascinati da questo moto, erano soggetti a moti propri, di diversa durata, tutti da ovest verso est: Mercurio, Venere e il Sole con un periodo di circa un anno, Marte di circa due anni, Giove di circa dieci, ed infine Saturno di circa trenta. Caratteristica comune era, evidentemente, che a causa dell'uniformità di questi moti circolari, e della concentricità con la Terra, i pianeti si sarebbero dovuti trovare sempre alla stessa distanza da noi, e quindi apparire sempre della stessa "grandezza" (e quindi luminosità); oltre a ciò, i moti sarebbero sempre dovuti essere "diretti" da ovest a est, senza mai invertire direzione. Possiamo quindi immaginare l'imbarazzo dei filosofi aristotelici di fronte alle evidenze contrarie. Prima di tutto i pianeti mostrano luminosità alquanto variabili nel tempo, indicando una variazione della loro distanza dalla Terra durante il loro moto. Inoltre, *periodicamente* i pianeti sembrano "fermarsi" (nelle cosiddette "stazioni") per poi temporaneamente invertire il loro moto, muovendosi sullo sfondo delle stelle fisse da est a ovest, per poi rifermarsi e riprendere quindi l'ordinario "moto diretto" da overst verso est. Motivazioni filosofiche legate anche alla perfezione del moto circolare, fecero sì che il sistema aristotelico potesse sopravvivere a queste difficoltà, fatto che provocò una sorta di dicotomia tra "sistema cosmologico", di natura prettamente filosofica, e l'Astronomia vera e propria, basata sul Modello di Tolomeo, di carattere esclusivamente matematico. Per tutto il Medioevo i due sistemi convissero, con la tacita convinzione che il sistema tolemaico con *epicicli, eccentrici* ed *equanti*, non fosse che un utile artifizio matematico per *"salvare i fenomeni"* e poter calcolare le posizioni dei pianeti, sulle quali si basava l'astronomia *"astrologica"* di quei secoli. Di conseguenza, il sistema tolemaico raramente fu considerato un vero e proprio "sistema cosmologico", come si evince da molti dei testi medievali di astronomia, come i *"Theorica Planetarum"* (Gherardo da Cremona, Campano da Novara) o *"Nova Theorica Planetarum"* (Giorgio Puerbachus) o i *"De Sphera"* (Sacrobosco, Michele Scoto). A dispetto delle sue difficoltà nello *spiegare i dati osservativi*, la

*Published in "Giornale di Fisica", vol.LIII, N.4, (2012) 287-292.
†ITIS Marconi, Pontedera (PI); email: sranfone@alice.it

cosmologia restava fondamentalmente aristotelica e oggetto dei filosofi piuttosto che degli astronomi, cosmologia trasmessaci attraverso il trattato "De Coelo et Mundo" dello stagirita e ripetutamente *commentata* durante tutto il medioevo, fino ai tempi di Galileo. Osservazioni sempre più precise da una parte, e l'implicita incoerenza teorica del modello aristotelico-tolemaico dall'altra, portarono poi alla Rivoluzione Copernicana. Nel contesto di questo modello, detto eliocentrico, il Sole era posto al centro dell'Universo, circondato da tutti i pianeti in moto circolare uniforme; unica eccezione, naturalmente, la Luna, che veniva lasciata in orbita attorno alla Terra. Motivazioni fondamentali per questo modello furono, infatti, sia la comprensione della variazione della luminosità apparente dei pianeti (dovuta alla variabile distanza dalla Terra), che la spiegazione del loro Moto Retrogrado. Ricordiamo comunque che quella di Copernico fu in realtà una *riscoperta*, nel senso che il sistema eliocentrico era già stato teorizzato da Aristarco di Samo nel III° secolo a.C., e noto ad astronomi antichi successivi, come Ipparco. Anche Plutarco, vissuto nel I° secolo della nostra Era, menzionò questo modello nel suo *"De Facie in Orbe Lunae"*, come pure fece Seneca nel libro VII° delle sue *"Questiones Naturales"*. Il perfezionamento di Keplero all'inizio del $XVII^{\circ}$ secolo, con l'introduzione delle orbite "ellittiche" per i pianeti ed il Sole posto in uno dei suoi fuochi, non modificava di fatto la soluzione copernicana, anche perché la maggior parte dei pianeti ha in effetti orbite "quasi circolari".

Nella presente nota desideriamo mostrare come è possibile ottenere, a fini essenzialmente didattici, e con una trattazione matematicamente elementare, formule precise che permettono di determinare la durata del "moto retrogrado" e di quello "diretto", nell'ipotesi semplificativa di orbite circolari, semplicemente in funzione della distanza del pianeta dal Sole. Si ritiene che questo possa costituire un interessante esercizio da illustrare a studenti del I° anno delle facoltà scientifiche, ma anche a studenti dell'ultimo anno di Liceo.

Considereremo qui solo il moto dei cosiddetti pianeti "interni", Mercurio e Venere, le cui orbite sono assunte circolari e complanari con quella della Terra, ovvero giacenti sul piano dell'*eclittica*. Va comunque precisato che la presente trattazione può comunque essere facilmente generalizzata alle orbite ellittiche e ai pianeti "esterni".

Un conveniente sistema di coordinate è evidentemente quello polare-piano, col Sole S fisso nell'origine O. Le posizioni del generico pianeta P e della Terra T, le cui distanze dal Sole sono rispettivamente r ed R, sono quindi determinate dai rispettivi raggi vettore $\vec{SP}$ e $\vec{ST}$ (Fig. 1):

$$\vec{SP} = r\,(\hat{\imath}\cos\theta_P + \hat{\jmath}\sin\theta_P\,)\,, \tag{1}$$
$$\vec{ST} = R_T\,(\hat{\imath}\cos\theta_T + \hat{\jmath}\sin\theta_T\,)\,, \tag{2}$$

avendo scelto come asse x (dove $\theta_{P(T)} = 0$) la direzione della loro "congiunzione inferiore" (in cui S, P e T sono allineati in tale ordine), assunta all'istante iniziale $t = 0$. L'uniformità dei due moti circolari implica allora che i due angoli polari siano direttamente proporzionali al tempo t:

$$\theta_P(t) = \Omega_P\,t\,, \qquad \theta_T(t) = \Omega\,t\,, \tag{3}$$

essendo Ω_P e Ω le velocità angolari del pianeta P e della Terra, rispettivamente. Per trovare una relazione tra queste ultime possiamo usare la "Terza Legge di Keplero" che, lo ricordiamo, può essere facilmente ottenuta imponendo l'equilibrio tra la forza di gravitazione universale e la forza centrifuga:

$$F_G = \frac{G_N M_S\,m_P}{r^2} = m_P\,\Omega_P^2\,r \;\Rightarrow\; \Omega_P^2\,r^3 = G_N M_S = \text{costante per ogni pianeta } P \;\equiv\; \Omega^2\,R^3\,,$$

da cui:

$$\Omega_P = \kappa\,\Omega\,, \tag{4}$$

dove si è definito:

$$\kappa = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{3}{2}} . \tag{5}$$

Evidentemente, $\kappa > 1$ per i pianeti interni che stiamo qui considerando e $\kappa < 1$ per quelli esterni. Usando le equazioni da (1) a (5) possiamo allora esprimere la *legge oraria* del raggio vettore $\vec{TP}$ che va dalla Terra al pianeta come:

$$\vec{TP} = \vec{SP} - \vec{ST} = R\left\{\hat{i}\left[\kappa^{-2/3}\cos(\kappa\Omega\, t) - \cos(\Omega\, t)\right] + \hat{j}\left[\kappa^{-2/3}\sin(\kappa\Omega\, t) - \sin(\Omega\, t)\right]\right\} . \tag{6}$$

L'angolo polare ϕ di questo vettore, ovvero l'angolo che questo vettore forma con l'asse x, è perciò una funzione del tempo data da:

$$\phi = \arctan f(t)\,, \tag{7}$$

dove si è definito:

$$f(t) = \frac{\sin(\kappa\,\Omega\, t) - \kappa^{2/3}\sin(\Omega\, t)}{\cos(\kappa\,\Omega\, t) - \kappa^{2/3}\cos(\Omega\, t)} . \tag{8}$$

Il moto "diretto" del pianeta, cioè il moto da ovest a est osservato dalla Terra, corrisponde ad angoli polari ϕ crescenti, mentre quello "retrogrado", ovvero da est a ovest, ad angoli ϕ decrescenti. Introducendo la velocità angolare $\dot{\phi} = d\phi/dt$, possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} \text{"Moto Diretto"} \;\Leftrightarrow\; \dot{\phi} > 0\,, \\ \text{"Moto Retrogrado"} \;\Leftrightarrow\; \dot{\phi} < 0\,. \end{cases} \tag{9}$$

Il calcolo esplicito di $\dot{\phi}$ porta alla seguente espressione:

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{f}(t)}{1 + [f(t)]^2}\,, \tag{10}$$

da cui si evince che

$$\mathrm{sgn}(\dot{\phi}) = \mathrm{sgn}(\dot{f}) \equiv \mathrm{sgn}(f')\,,$$

poiché $\dot{f} = f'\,\Omega$ (con $\Omega > 0$), dove $f' = \frac{df(\theta)}{d\theta}$. Essendo quindi

$$f'(\theta_T) = \frac{\kappa^{-1/3} + 1 - \kappa^{-2/3}\,(1+\kappa)\,\cos[(\kappa-1)\theta_T]}{\left(\kappa^{-2/3}\cos(\kappa\,\theta_T) - \cos\theta_T\right)^2}\,, \tag{11}$$

possiamo concludere che la condizione per avere "moto retrogrado", $\dot{\phi} < 0$, corrisponde alla seguente disequazione:

$$\cos\left[(\kappa-1)\,\theta_T\,\right] \;>\; \frac{\kappa^{1/3}\,(1+\kappa^{1/3})}{1+\kappa} \;\equiv A(\kappa)\,. \tag{12}$$

Si fa notare che $A(\kappa)\;\leq\;1\,\forall\,\kappa$, per cui avremo sempre soluzioni accettabili. La (12) può facilmente essere risolta in $\theta_T\;=\Omega\,t$; in particolare, detta $\tilde{t}$ la soluzione dell'equazione:

$$\cos[(\kappa-1)\,\Omega\,\tilde{t}\,] = A(\kappa)\,,$$

possiamo esprimere la durata $\Delta\tau_R$ di ciascuna fase di moto retrogrado del nostro pianeta interno, con la seguente formula (vedi Fig. 2):

$$\Delta\tau_R\;=2\,\tilde{t} = \frac{T_a}{(\kappa-1)\,\pi}\;\arccos\left[\frac{\kappa^{1/3}\,(1+\kappa^{1/3})}{1+\kappa}\right]\,, \tag{13}$$

dove si è tenuto conto che la velocità angolare della Terra è $\Omega\;=\;2\pi/T_a$, essendo $T_a\;=\;365.25$ giorni l'anno terrestre. Di conseguenza la durata del moto diretto (da ovest a est) è data da:

$$\Delta\tau_D\;=\frac{T_a}{\kappa-1}-2\,\tilde{t} = \frac{T_a}{\kappa-1}\;\left(1-\frac{1}{\pi}\;\arccos\left[\frac{\kappa^{1/3}\,(1+\kappa^{1/3})}{1+\kappa}\right]\right)\,. \tag{14}$$

Evidentemente la somma $\Delta\tau_D+\Delta\tau_R=\frac{T_a}{\kappa-1}\;=T_S$ è uguale al "periodo sinodico", cioè all'intervallo di tempo fra due configurazioni omologhe successive del pianeta. Ed in effetti il nostro risultato non è altro che una forma diversa di scrivere le cosiddette "equazioni del moto sinodico", come si può vedere dal fatto che, essendo: $\Omega_S=\Omega_P-\Omega$, si ha:

$$T_S=\frac{2\pi}{\Omega_S}=\frac{2\pi}{\Omega_P-\Omega}=\frac{T_a}{\kappa-1}\,, \tag{15}$$

dove si è tenuto conto che $\kappa=\Omega_P/\Omega$.

Per verificare le relazioni ottenute consideriamo, come già detto, i due pianeti interni, Mercurio e Venere. Per il primo dei due, il rapporto tra la sua distanza dal Sole e quella della Terra dal Sole risulta essere $r/R\simeq 0.39$, per cui $\kappa\simeq 4.1$. Sostituendo questo valore nelle eq.(14) e (13) si ottiene:

$$\Delta\tau_D = 94.5\text{ giorni}\,,\qquad \Delta\tau_R = 23.1\text{ giorni}\,,$$

in eccellente accordo con quanto osservato:

$$\Delta\tau_D^{oss} = 93\text{ giorni}\,,\qquad \Delta\tau_R^{oss} = 24\text{ giorni}\,.$$

Notare che anche il valore "calcolato" del periodo sinodico $T_S=\Delta\tau_D+\Delta\tau_R=117.6$ giorni, è pure molto vicino al valore "reale" misurato: $T_S^{oss}=115.9$ giorni.

Analogamente, l'applicazione delle formule da noi ottenute per il pianeta Venere, per il quale $r/R\simeq 0.72$, cioè $\kappa=1.64$, porta ai seguenti risultati:

$$\Delta\tau_D = 531\text{ giorni}\,,\qquad \Delta\tau_R = 42\text{ giorni}\,.$$

Anche in questo caso si ha un buon accordo coi dati osservati:

$$\Delta\tau_D^{oss} = 541 \text{ giorni}\,, \qquad \Delta\tau_R^{oss} = 42 \text{ giorni}\,.$$

Il periodo sinodico calcolato è quindi: $T_S = 573$ giorni, mentre quello "reale" è di 583 giorni.

Come già detto sopra, la semplice trattazione qui esposta può senza difficoltà essere generalizzata al caso dei pianeti esterni e corretta introducendo le più realistiche orbite ellittiche, anziché quelle circolari da noi assunte.

Visti i semplici strumenti matematici da noi utilizzati si ritiene che il presente *"esercizio"* possa essere di una certa utilità didattica, fornendo un interessante esempio di applicazione del calcolo vettoriale e dell'Analisi Matematica ad un problema fisico reale.

References

[1] J. L. E. Dreyer, *Storia dell'Astronomia da Talete a Keplero* ,Feltrinelli, Milano.

[2] Fred Hoyle, *Astronomy*, Doubleday & Company, New York.

[3] Michael Hoskin (a cura di -), *Storia dell'Astronomia di Cambridge*, Rizzoli, Milano.

[4] Olaf Pedersen, *Early Physics and Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] P. Bakulin, E. Kononovic, V. Moroz, *Astronomia Generale*, Edizioni MIR, Roma-Mosca.

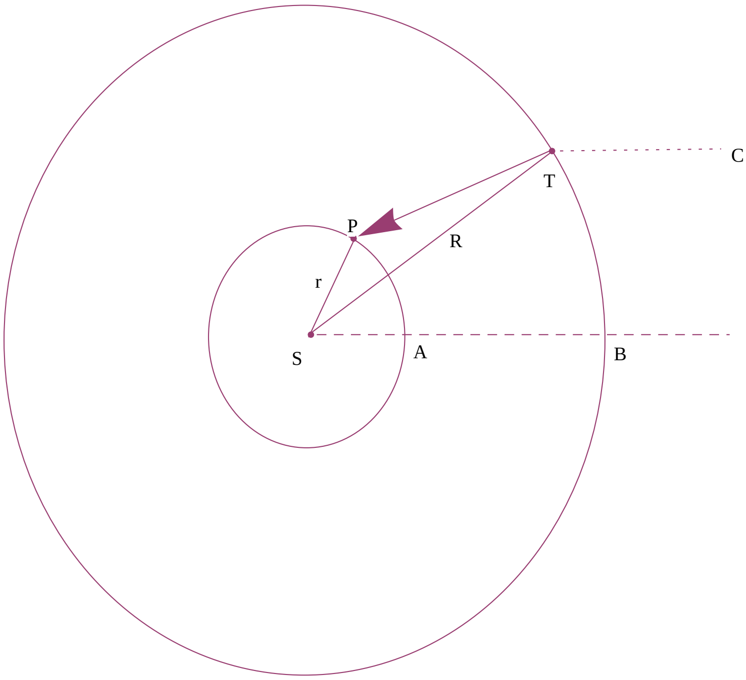

Fig. 1 Orbite circolari del pianeta (interno) P e della Terra T attorno al Sole S. Gli angoli polari sono $\theta_T = \mathrm{B}\widehat{S}\mathrm{T}$, $\theta = \mathrm{A}\widehat{S}\mathrm{P}$, e $\phi = \mathrm{C}\widehat{T}\mathrm{P}$.

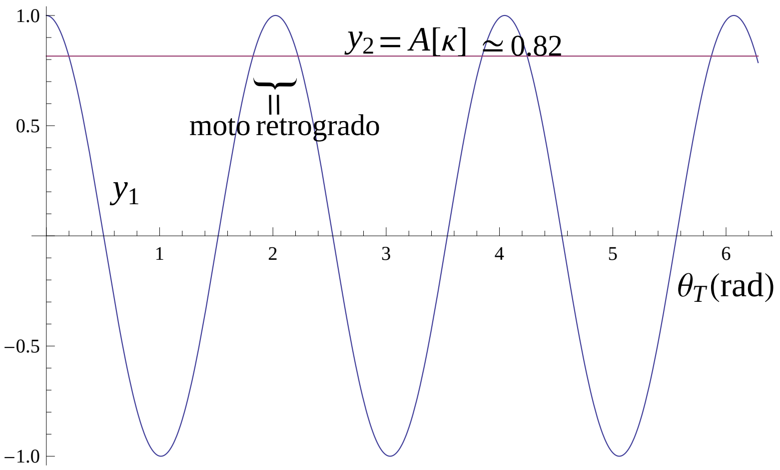

Fig.2 : Grafici di $y_1(\theta_T) = \ \mathrm{Cos}\left[(\kappa - 1)\theta_T\right]$,
$y_2 = \text{costante} = A[\kappa]$, per il pianeta Mercurio ($\kappa = 4.106$).